Математическая физика, анализ, геометрия
2004, т. 11, № 4, с. 518–536

Целые функции-миноранты: опыт применения оценок Мацаева–Островского–Содина

Б.Н. Хабибуллин

Институт математики, Башкирский государственный университет
ул. Фрунзе, 32, Уфа, 450074, Россия
E-mail:khabib-bulat@mail.ru

Статья поступила в редакцию 1 сентября 2004 г.

Пусть q — положительная функция на положительной полуоси комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Специальные оценки положительного субгармонического канонического интеграла рода 1 и их мер Рисса из недавней совместной работы В.И. Мацаева, И.В. Островского и М.Л. Содина применяются к доказательству существования целой функции $f(z) \not\equiv 0$, $z \in \mathbb{C}$, с определенными ограничением на рост $|f|$ на всей плоскости $\mathbb{C}$ и такой, что $|f(x)| \leqslant e^{-q(|x|)}$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Нехай q — додатня функція на додатній півосі комплексної площини $\mathbb{C}$. Спеціальні оцінки додатних субгармонічних інтегралів роду 1 та їх рисовських мір із недавно надрукованої спільної роботи В.І. Мацаєва, Й.В. Островського і М.Л. Содіна застосовуються до доведення існування цілої функції $f(z) \not\equiv 0$, $z \in \mathbb{C}$, з деякими обмеженнями на зростання $|f|$ в площині $\mathbb{C}$ і такої, що $|f(x)| \leqslant e^{-q(|x|)}$ на дійсній осі.

Посвящается 70-летию Иосифа Владимировича Островского

1. Введение

Основная цель статьи — проиллюстрировать применение оценок канонического интеграла Адамара–Вейерштрасса рода 1 и ее меры Рисса на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ из совместной статьи В.И. Мацаева, И.В. Островского и М.Л. Содина [1] (см. также сжатое изложение в [2]) к доказательству теорем

Mathematics Subject Classification 2000: 30D15 (primary); 31A05, 31A15 (secondary).
Key words: entire function, multiplier, subharmonic minorant, Jensen measure.
Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 03–01–00033) и программы Государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–1528.2003.1).

о существовании нетривиальной целой функции-миноранты f для функции, заданной на вещественной оси $\mathbb{R}$, с одновременным ограничением на рост $|f|$ на всей плоскости $\mathbb{C}$. Это применение осуществляется через неконструктивный метод выметания, позволяющий обойтись без явного построения такой миноранты. Наиболее общая на данный момент схема использования этого метода изложена в [3]. Но в настоящей работе нам достаточны даже первоначальные результаты П. Кусиса из [4] о наименьшей супергармонической мажоранте (наибольшей субгармонической миноранте), изложенные и в [5, 6]. В начале 1990-х годов они послужили толчком для разработки метода выметания. В основе техники метода лежат абстрактные выметания единичной массы в точке $0 \in \mathbb{C}$ относительно конуса $SH(\mathbb{C})$ субгармонических в $\mathbb{C}$ функций, которые называются мерами Йенсена.

Следуя Л. Шварцу [7], всюду *положительность* числа, функции, меры и т.п. понимаем как $\geqslant 0$. Если функция или отображение f на множестве A тождественно равняются некоторому значению b, то пишем "$f \equiv b$ *на* (или *в*) A"; в противном случае — "$f \not\equiv b$ *на* (или *в*) A". Функция f, определенная на подмножестве вещественной оси $\mathbb{R}$, называется *возрастающей*, если при всех $t_1 < t_2$ из области определения функции f выполнено неравенство $f(t_1) \leqslant f(t_2)$. Функция f — *убывающая*, если $-f$ — возрастающая функция.

Ограничимся частным случаем упомянутых оценок Мацаева–Островского–Содина для *положительных* канонических интегралов (см. ниже теорему А).

$\mathcal{M}^+$ — класс всех положительных борелевских мер μ на $\mathbb{C}$.

Если мера $\nu \in \mathcal{M}^+$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \min\left(\frac{1}{|\zeta|}, \frac{1}{|\zeta|^2}\right) \mathrm{d}\nu(\zeta) < +\infty, \tag{1.1}$$

то корректно определен канонический интеграл I_ν рода 1:

$$I_\nu(z) := \int\limits_{\mathbb{C}} H(z/\zeta)\,\mathrm{d}\nu(\zeta), \quad H(z) := \log|1-z| + \operatorname{Re} z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Пусть $D(z,r) := \{\zeta \in \mathbb{C} \colon |\zeta - z| < r\}$ — открытый круг радиуса $r > 0$ с центром в $z \in \mathbb{C}$, а $\overline{D}(z,r)$ — его замыкание в $\mathbb{C}$; при $r = 0$ по определению $D(z,0) = \varnothing$ — пустое множество, но $\overline{D}(z,0) = \{z\}$ — одноточечное множество; $D(r) := D(0,r)$, $\overline{D}(r) := \overline{D}(0,r)$, $r \geqslant 0$. Для меры $\nu \in \mathcal{M}^+$ полагаем $\nu(z,r) := \nu\bigl(\overline{D}(z,r)\bigr)$, $\nu(r) := \nu(0,r)$, $r \geqslant 0$. Наряду с обычной *считающей функцией* $\nu(r)$ используем *считающую функцию Левина–Цудзи* (см. [8–10])

$$\mathfrak{n}_\nu(r) := \nu(ir/2, r/2) + \nu(-ir/2, r/2), \quad r \geqslant 0.$$

$\mathbb{R}^+ := \{a \in \mathbb{R}\colon\ a \geqslant 0\}$ и $i\mathbb{R}$ — *положительная полуось* и *мнимая ось.*

Теорема A ([1, теорема 1, следствие 1]; [2, теорема 4.5]). *Если канонический интеграл I_ν рода 1 положителен всюду на $\mathbb{C}$, то справедливы оценки*

$$I_\nu(z) \leqslant \mathrm{const.} \left(|z| \int\limits_0^{|z|} \frac{\mathfrak{n}_\nu(t)}{t^2}\,dt + |z|^2 \int\limits_{|z|}^{\infty} \frac{\mathfrak{n}_\nu(t)}{t^3}\,dt \right), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1.2m}$$

$$\nu(r) \leqslant \mathrm{const.} \left(r \int\limits_0^{r} \frac{\mathfrak{n}_\nu(t)}{t^2}\,dt + r^2 \int\limits_{r}^{\infty} \frac{\mathfrak{n}_\nu(t)}{t^3}\,dt \right), \quad r > 0, \tag{1.2n}$$

где здесь и ниже const — *некоторая постоянная из* $\mathbb{R}^+$.

Версии оценок Мацаева–Островского–Содина (1.2) из разд. 2 (теорема 1 и следствие 2) и будут применяться к задаче существования нетривиальных целых функций-минорант.

Пусть $\rho,\ \sigma \in \mathbb{R}^+$. Класс субгармонических функций u в $\mathbb{C}$ типа $\leqslant \sigma$ при порядке ρ (см. [11]), т.е. таких, что $\limsup_{z\to\infty} |z|^{-\rho} u(z) \leqslant \sigma$, обозначаем $SH[\rho,\sigma]$. Соответственно $\mathrm{Ent}[\rho,\sigma]$ — класс целых функций f типа $\leqslant \sigma$ при порядке ρ (см. [8–10]), т.е. таких, что $\log|f| \in SH[\rho,\sigma]$. В частности, $\cup_{\sigma>0}\mathrm{Ent}[1,\sigma]$ — класс целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.т.).

Через $\mathcal{C}_\rho$ обозначаем класс непрерывных функций $q\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, для которых сходится, т. е. конечен, интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{q(t)}{t^{\rho+1}}\,dt.$$

Теорема B. *Если $q \in \mathcal{C}_1$ — возрастающая, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $f \not\equiv 0$, что $f \in \mathrm{Ent}[1,\varepsilon]$ и $|f(x)| \leqslant \exp\bigl(-q(|x|)\bigr)$ при $x \in \mathbb{R}$.*

Теорема B может быть принята за начальную точку отсчета теорем о целой функции-миноранте. При переформулировке ее заключения в виде *“функция $f(x)\exp q(|x|)$ ограничена на $\mathbb{R}$”* эта теорема может трактоваться и как теорема о мультипликаторе (термин, по-видимому, принадлежит А. Берлингу и П. Мальявену). Теорема B установлена в 1934 г. в неявном виде в монографии Р. Пэли и Н. Винера [12, гл. I] как проявление результатов о квазианалитичности, а в более явной форме — в статье А.Е. Ингама [13]. Начиная с того же года, эту теорему независимо и различными методами в разнообразных формах доказывали в своих работах А. Уинтнер, Б. Йессен и А. Уинтнер, Н. Левинсон, Т. Кавата, Л.И. Ронкин, С. Мандельбройт, Р.П. Боас, Р.М. Редхеффер, П. Кусис, В.А.И. Люксембург и Я. Коревар (см. [14–16, 5]). Известны и многомерные варианты теоремы А, зачастую формулируемые в завуалированной форме. Так, в неявном виде подобные результаты фигурируют в теории ультрараспределений у Г. Бьорка [17], Х. Коматсу [18], С. Абдаллаха [19], в явном — у Б.Н. Хабибуллина [20, теоремы 2, 3]. Апофеозом исследований вопроса о существовании ц.ф.э.т., играющих роль миноранты или мультипликатора, стали знаменитые глубокие совместные результаты А. Берлинга и П. Мальявена [21, 22] (см. также [23]), часть из которых объединяет

Теорема C. *Пусть* $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *— сужение на* $\mathbb{R}$ *функции* $\log^+|F| := \max\{0, \log|F|\}$*, где* F *— ц.ф.э.т., или производная* W' *ограничена на* $\mathbb{R}$*. Если функция* $W(t)+W(-t)$*,* $t \in \mathbb{R}^+$*, принадлежит классу* $\mathcal{C}_1$*, то для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такая ц.ф.э.т.* $f \not\equiv 0$*, что* $f \in \mathrm{Ent}[1, \varepsilon]$ *и* $|f| \leqslant \exp(-W)$ *на* $\mathbb{R}$*.*

Новые по существу доказательства теоремы C были даны Л. де Бранжем [24] и несколько — П. Кусисом. Программные исследования П. Кусиса по новым доказательствам, обобщениям и приложениям теорем Берлинга–Мальявена о мультипликаторе в определенной степени подытожены в его книгах [5, 6]. Результаты нашей работы в значительной мере не приводят к доказательству теоремы C. В то же время общая схема из разд. 3 вполне достаточна в качестве начального этапа доказательства теоремы C, вместе с техникой применения версий оценок Мацаева–Островского–Содина из разд. 2 к доказательству более слабых теорем о миноранте, или о мультипликаторе, могут служить стимулирующим фактором к развитию этой оценки до уровня, позволяющего охватить и теорему C (см. [25, § 5]).

Известные результаты позволяют легко получить обобщение теоремы B на функции $q \in \mathcal{C}_\rho$ при $\rho \geqslant 1$ (см. ниже следствие 1). Один из них принадлежит Р.М. Редхефферу [14, 15, теорема 39]:

Теорема D. *Пусть* $q \in \mathcal{C}_2$ *— возрастающая функция, а функция* $q(x)/x^2$*,* $x > 0$*, интегрируема в правой окрестности нуля. Тогда существует четная целая функция* f *только с вещественными нулями, для которой*

$$\log|f(x)| \leqslant 1 - q(|x|), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.3x}$$

$$\log|f(iy)| \leqslant e\left(|y|\int\limits_0^{|y|}\frac{q(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + y^2\int\limits_{|y|}^{\infty}\frac{q(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t\right), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{1.3y}$$

В [15, с. 27] также отмечено, что при определенных условиях регулярности поведения функции q число e в (1.3у) можно заменить на единицу.

Оценки (1.3) теоремы D были продолжены на всю плоскость и на произвольные $\rho \geqslant 1$ в работах С. Мандельбройта [26], В. Кацнельсона и С. Мандельбройта [27, 28] (см. также обзоры [15, теорема 40] и [29, § 2])

Теорема Е. *Пусть $\rho \geqslant 1$, $q \in \mathcal{C}_\rho$ — возрастающая функция, а функция $q(x)/x^2$, $x > 0$, интегрируема в правой окрестности нуля. Тогда существует четная целая функция f, удовлетворяющая оценке*

$$\log|f(x+iy)| \leqslant A_\rho \left(|y| \int_0^{|y|} \frac{q(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + |y|^\rho \int_{|y|}^{\infty} \frac{q(t)}{t^{\rho+1}}\,\mathrm{d}t \right) - q(|x+iy|) \tag{1.4}$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}$, где постоянная A_ρ зависит только от ρ.

Доказательства С. Мандельбройта [26] и П. Кусиса (см. [15, с. 28]) этой теоремы при $\rho = 2$ дают для A_ρ в (1.4) значение $4/\log 2$.

Следствие 1. *При $\rho \geqslant 1$ и возрастании $q \in \mathcal{C}_\rho$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая целая функция $f \not\equiv 0$, что $f \in \mathrm{Ent}[\rho, \varepsilon]$ и $|f(x)| \leqslant e^{-q(|x|)}$ при $x \in \mathbb{R}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При произвольном $\varepsilon > 0$ применим теорему Е с функцией* $q_\varepsilon(t) = (q(t) - C_\varepsilon)^+$ в роли q, где постоянная $C_\varepsilon > q(0)$ выбрана столь большой, что выполнено неравенство

$$\int_0^{\infty} \frac{q_\varepsilon(t)}{t^{\rho+1}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{A_\rho} \tag{1.5}$$

с постоянной A_ρ из (1.4). Тогда по теореме Е найдется такая целая функция $f_\varepsilon \not\equiv 0$, что справедливы неравенства ($z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$)

$$\log|f_\varepsilon(z)| \leqslant A_\rho \left(|y| \int_0^{|y|} \frac{q_\varepsilon(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + |y|^\rho \int_{|y|}^{\infty} \frac{q_\varepsilon(t)}{t^{\rho+1}}\,\mathrm{d}t \right) - q_\varepsilon(|z|)$$
$$\leqslant A_p |y|^\rho \int_0^{\infty} \frac{q_\varepsilon(t)}{t^{\rho+1}}\,\mathrm{d}t - q(|z|) + C_\varepsilon \overset{(1.5)}{\leqslant} \varepsilon|y|^\rho - q(|z|) + C_\varepsilon$$

при всех $z \in \mathbb{C}$. Отсюда функция $f := f_\varepsilon \exp(-C_\varepsilon) \not\equiv 0$ — требуемая. ■

* Здесь и далее $a^+ := \max\{0, a\}$ для $a \in \mathbb{R}$.

Здесь и далее символ ■ отмечает конец доказательства.

Следствие 1 при значениях $\rho = 2k$, k — натуральное число, можно тривиальным образом и усилить. Действительно, для любого числа $c > 0$ функция

$$c \exp(-\varepsilon z^{2k}), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1.6}$$

принадлежит классу $\operatorname{Ent}[2k, \varepsilon]$ и $\equiv c \exp(-\varepsilon x^{2k})$ при $z = x \in \mathbb{R}$. Таким образом, если функция q удовлетворяет лишь ограничению $\lim_{t \to +\infty} t^{-2k} q(t) = 0$, которое для возрастающей функции q слабее условия $q \in \mathcal{C}_{2k}$ и следует из него (см. предложение 4.1), то функция (1.6) при достаточно малом c не превышает $e^{-q(|x|)}$ при $z = x \in \mathbb{R}$.

В разд. 4 новым методом доказана теорема E, но только для функций q из классов $\mathcal{C}_\rho$ при $1 \leqslant \rho \leqslant 2$ (см. теорему 2 для $\rho < 2$ и замечание 1 в конце разд. 4 для $\rho = 2$). В разд. 5 при определенной регулярности поведения функции q тем же методом установлена другая теорема 3 о целых функциях-минорантах с более простыми окончательными оценками. Здесь мы воздерживаемся от подробного обсуждения связей теорем о миноранте с проблемой Гельфанда–Шилова и с результатами М.М. Джрбашяна и К.И. Бабенко по ней (см. обзор [29, § 2]). Более подробный комментарий о возможностях используемых методов при произвольных $\rho \geqslant 1$ в духе теоремы E и переспективах их развития дан в заключительном замечании в разд. 5.

Автор глубоко признателен М.Л. Содину за стимулирующие контакты и предоставленные задолго до публикации рукописи статей [1, 2, 25], а также рецензенту за полезную информацию и замечания.

2. Версии оценок Мацаева–Островского–Содина

В этом разделе уточняем числовые постоянные const в неравенствах (1.2) теоремы A, поскольку для наших целей принципиально важно, чтобы эти постоянные были абсолютными. Оценки (2.2) фактически доказаны в [1], но содержатся там как промежуточный этап выкладок.

Как всегда, для функции $u \in SH(\mathbb{C})$ в обозначении $u^+(z) := \max\{u(z), 0\}$

$$T(r, u) := \int_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta, \quad r > 0, \quad T(0, u) := u^+(0),$$

— обычная *характеристика Неванлинны* функции u, а для меры* $\nu \in \mathcal{M}^+$

$$N_\nu(r) := \int_0^r \frac{\nu(t)}{t}\, \mathrm{d}t, \quad r > 0, \tag{2.1}$$

* Всюду, где в данной работе возникает интеграл вида (2.1), он сходится по какому-либо условию. Следовательно, можно полагать $N_\nu(0) = 0$.

— *усредненная*, или проинтегрированная, *считающая функция* меры ν.

Теорема 1. *Если канонический интеграл I_ν рода 1 положителен всюду на $\mathbb{C}$, то при всех $R>0$ справедливы оценки*

$$\int\limits_R^\infty \frac{T(r,I_\nu)}{r^3}\,\mathrm{d}r = \int\limits_R^\infty \frac{N_\nu(r)}{r^3}\,\mathrm{d}r \leqslant \int\limits_R^\infty \int_0^r \frac{\mathfrak{n}_\nu(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\,, \tag{2.2N}$$

$$\frac{\nu(R)}{2R^2} \leqslant \int\limits_R^\infty \frac{\nu(r)}{r^3}\,\mathrm{d}r \leqslant e^2 \int\limits_{eR}^\infty \int_0^r \frac{\mathfrak{n}_\nu(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\,. \tag{2.2n}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие (1.1) обеспечивает (см. [1, (2.4)]) соотношения

$$T(r,I_\nu), \nu(r), \mathfrak{n}_\nu(r) = \begin{cases} o(r), & r\to 0,\\ o(r^2), & r\to +\infty, \end{cases}$$

откуда следует выполнение условий [1, (3.8–9)] для функции $v = I_\nu$. Последнее согласно [1, леммы 4, 5] дает неравенство (2.2N) (см. доказательство теоремы A в [1, разд. 4]). Переход от (2.2N) к (2.2n) осуществляется за счет элементарной оценки $\nu(r) \leqslant N_\nu(er)$, $r>0$, и замены переменной. ∎

Инверсией меры $\mu \in \mathcal{M}^+$, сосредоточенной вне нуля, т.е. с условием $\mu(\{0\}) = 0$, называем меру μ^*, построенную по правилу

$$\mu^*(B) := \mu(B^*), \quad B^* := \{z \in \mathbb{C}\colon 1/\overline{z} \in B\}. \tag{2.3}$$

Очевидно, $(\mu^*)^* = \mu$. Для конечной меры $\mu \in \mathcal{M}^+$, т.е. при $\mu(\mathbb{C}) < +\infty$, применяем также *инверсию* соответственно считающей функции, считающей функции Левина–Цудзи и усредненной считающей функции

$$\mu^*(r) := \mu\bigl(\mathbb{C} \setminus D(r)\bigr) = \mu(\mathbb{C}) - \mu(r), \quad r \geqslant 0, \tag{2.4m}$$

$$\mathfrak{n}^*_\mu(r) := \mu\bigl(\{z \in \mathbb{C}\colon |\mathrm{Im}\, z| \geqslant r\}\bigr), \quad r \geqslant 0, \tag{2.4n}$$

$$N^*_\mu(r) := \int\limits_r^\infty \frac{\mu^*(t)}{t}\,\mathrm{d}t, \quad r \geqslant 0. \tag{2.4N}$$

Очевидно, для меры μ с ограниченным носителем считающие функции из (2.4) *убывающие* и *финитные*, т.е. $\equiv 0$ при достаточно больших r.

Следующая версия оценки Мацаева–Островского–Содина — просто переформулировка теоремы 1 после инверсии $\nu = \mu^*$ конечной меры μ (ср. [1, следствие 3]) и замены-инверсии переменной $\zeta \to 1/\overline{\zeta}$.

Следствие 2. *Пусть мера $\mu \in \mathcal{M}^+$ с ограниченным носителем сосредоточена вне нуля, а интеграл* (*потенциал меры μ рода* 1)

$$V_\mu^1(\zeta) := \int\limits_{\mathbb{C}} H(z/\zeta)\,\mathrm{d}\mu(z), \quad \zeta \neq 0, \tag{2.5}$$

положителен всюду на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда при всех $r \geqslant 0$ справедливы оценки

$$\int\limits_0^r tN_\mu^*(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int\limits_0^r \int_t^\infty \mathfrak{n}_\mu^*(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,, \tag{2.6N}$$

$$\frac{1}{2}\,r^2\mu^*(r) \leqslant \int\limits_0^r t\mu^*(t)\,\mathrm{d}t \leqslant e^2 \int\limits_0^{r/e} \int\limits_t^\infty \mathfrak{n}_\mu^*(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,. \tag{2.6n}$$

3. Меры Йенсена и субгармонические и целые функции-миноранты

Нам потребуются некоторые свойства мер Йенсена из [4–6, 30–35].

Мера $\mu \in \mathcal{M}^+$ с компактным носителем в $\mathbb{C}$ называется *мерой Йенсена в* $\mathbb{C}$, если для всех $u \in SH(\mathbb{C})$ выполнено неравенство $u(0) \leqslant \int_{\mathbb{C}} u\,\mathrm{d}\mu$. Класс всех мер Йенсена в $\mathbb{C}$ обозначаем через $\mathcal{J}$, а его подкласс, состоящий из мер с носителем, не содержащим нуля, — через $\mathcal{J}_0$.

Для $\mu \in \mathcal{J}$ справедливы равенства

$$\int\limits_{\mathbb{C}} z^k\,\mathrm{d}\mu(z) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad \mu(\mathbb{C}) = 1, \tag{3.1}$$

т.е. μ — вероятностная мера, а потенциал меры Йенсена μ

$$V_\mu(\zeta) := \int\limits_{\mathbb{C}} \log|z-\zeta|\,\mathrm{d}\mu(z) - \log|\zeta| = \int\limits_{\mathbb{C}} \log\Bigl|1-\frac{z}{\zeta}\Bigr|\,\mathrm{d}\mu(z)\,, \quad \zeta \neq 0, \tag{3.2}$$

положителен всюду на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $V_\mu \equiv 0$ вне некоторого круга.

Из (3.1) следует, что потенциал V_μ^1 меры Йенсена $\mu \in \mathcal{J}$ рода 1 из (2.5) корректно определен и совпадает с V_μ из (3.2). В частности, такой потенциал V_μ^1 положителен всюду на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и для мер Йесена μ из $\mathcal{J}_0$ справедливы оценки (2.6) следствия 2.

Для непрерывной функции $M\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ через* $\mathfrak{M}M$ обозначаем наибольшую субгармоническую миноранту функции M, т.е. $\mathfrak{M}M$ — полунепрерывная сверху регуляризация поточечной верхней грани всех субгармонических

* В [4–6] так обозначена наименьшая супергармоническая мажоранта.

функций, не превышающих M всюду на $\mathbb{C}$. Очевидно, $\mathfrak{M}M$ — субгармоническая функция и $\mathfrak{M}M \leqslant M$ на $\mathbb{C}$.

Место мер Йенсена в настоящей работе определяется следующим результатом из [4–6] (см. также его развития в [3, 31–33].

Теорема F. *Пусть функция $M\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ непрерывна. Условие*

$$-\infty < \inf_{\mu \in \mathcal{J}_0} \int\limits_{\mathbb{C}} M \, \mathrm{d}\mu \tag{3.3}$$

эквивалентно тому, что $\mathfrak{M}M(0) \neq -\infty$. Более того, при условии (3.3) *миноранта $\mathfrak{M}M$ конечна и непрерывна всюду на $\mathbb{C}$, а также гармоническая на открытом множестве, на котором сама функция M гармоническая.*

В [4–6] в условии (3.3) точная нижняя грань берется по всему классу $\mathcal{J}$, но на самом деле в силу локальной ограниченности снизу функции M достаточно ограничиться даже мерами Йенсена с носителями вне фиксированного круга $D(R)$ произвольного радиуса R (см. [31, § 2, замечание 1]), поскольку меры Йенсена — вероятностные. Отметим, что миноранта $\mathfrak{M}M$ четной функции M четна, так как в этом случае совпадает с субгармонической функцией $\max\{\mathfrak{M}M(z), \mathfrak{M}M(-z)\}$, $z \in \mathbb{C}$.

Переформулируем теперь теорему F для функций M специального вида.

Следствие 3. *Пусть функции $q\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ и $Q\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ непрерывны и*

$$M(z) := -q\bigl(|z|\bigr) + Q\bigl(|\mathrm{Im}\, z|\bigr), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{3.4}$$

Условие (определения $\mu^*(r)$ и $\mathfrak{n}^*_\mu(y)$ см. в (2.4m), (2.4n))

$$-\infty < \inf_{\mu \in \mathcal{J}_0} \left(\int\limits_0^\infty q(r) \, \mathrm{d}\mu^*(r) - \int\limits_0^\infty Q(y) \, \mathrm{d}\mathfrak{n}^*_\mu(y) \right) \tag{3.5}$$

эквивалентно тому, что $\mathfrak{M}M(0) \neq -\infty$. При условии (3.5) *справедливо заключительное утверждение теоремы* F *и функция $\mathfrak{M}M$ — четная.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определений (2.4) инверсий считающих функций

$$\int\limits_0^\infty q(r) \, \mathrm{d}\mu^*(r) = \int\limits_0^\infty \bigl(-q(r)\bigr) \, \mathrm{d}\mu(r) = \int\limits_{\mathbb{C}} \bigl(-q(z)\bigr) \, \mathrm{d}\mu(z) \tag{3.6q}$$

$$-\int\limits_0^\infty Q(y) \, \mathrm{d}\mathfrak{n}^*_\mu(y) = \int\limits_{\mathbb{C}} Q\bigl(|\mathrm{Im}\, z|\bigr) \, \mathrm{d}\mu(z). \tag{3.6Q}$$

Отсюда сумма левых частей в (3.6q) и (3.6Q) по определению (3.4) функции M равна интегралу $\int_{\mathbb{C}} M\,\mathrm{d}\mu$. Значит, условие (3.5) совпадает для данной функции M с условием (3.3), а следствие сразу вытекает из теоремы F. ■

Следствие 4. *Пусть функции q и Q такие же, как в следствии 3, и выполнено условие (3.5). Тогда найдется такая целая функция $f \not\equiv 0$, что для любой функции $d(z) > 0$ на $\mathbb{C}$ справедливо неравенство*

$$\log|f(z)| \leqslant \sup_{|w-z|\leqslant d(z)} Q\bigl(|\operatorname{Im} w|\bigr) - \inf_{|w-z|\leqslant d(z)} q\bigl(|w|\bigr) + 3\log\bigl(1+|z|+d(z)\bigr) + \log\frac{1}{d(z)}, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Пусть $u \not\equiv -\infty$ — субгармоническая функция. Согласно [32, лемма 2.2] или [3, предложение 9.1] найдется целая функция $f \not\equiv 0$, удовлетворяющая ограничению

$$\log|f(z)| \leqslant \sup_{|w-z|\leqslant d} u(w) + 3\log\bigl(1+|z|+d\bigr) + \log\frac{1}{d}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall d > 0. \tag{3.8}$$

Пусть M — функция из (3.4). По следствию 3 выполнено $u := \mathfrak{M}M \not\equiv -\infty$, $u \in SH(\mathbb{C})$ и $u \leqslant M$ на $\mathbb{C}$. Тогда для функции $f \not\equiv 0$ из (3.8) выполнено (3.7) с любой функцией $d(z) > 0$, $z \in \mathbb{C}$. ■

4. Миноранты для возрастающей функции

Неоднократно в этом разделе используется элементарное

Предложение 4.1 ([10, гл. II, § 1]). *Пусть $\rho > 0$ и $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — возрастающая функция. Если $q \in \mathcal{C}_\rho$, то существует предел*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{q(t)}{t^\rho} = 0 \tag{4.1}$$

и сходится интеграл Римана–Стильтьеса

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}q(t)}{t^\rho}\,. \tag{4.2}$$

Обратно, если сходится интеграл (4.2), то $q \in \mathcal{C}_\rho$ и выполнено (4.1). Кроме того, если функция $q(t)/t^\rho$, $t > 0$, интегрируема на $(0,1]$, то

$$\int_0^r \int_t^\infty \frac{\mathrm{d}q(s)}{s^\rho}\,\mathrm{d}t = (\rho-1)\int_0^\rho \frac{q(t)}{t^\rho}\,\mathrm{d}t + \rho r \int_r^\infty \frac{q(t)}{t^{\rho+1}}\,\mathrm{d}t, \quad r > 0. \tag{4.3}$$

Основной результат раздела —

Теорема 2. *Пусть возрастающая функция* $q\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *принадлежит классу* $\mathcal{C}_\rho$ *при некотором* ρ, $1 \leqslant \rho < 2$, *а функция* $q(x)/x^2$ *интегрируема на интервале* $(0,1]$. *Тогда найдется четная целая функция* $f \not\equiv 0$, *которая при всех* $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, *удовлетворяет неравенствам*

$$\log|f(z)| \leqslant 2e\left(|y|\int_0^{e|y|}\frac{q(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + e|y|^2\int\limits_{e|y|}^{\infty}\frac{q(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t\right) - q(|z|) \tag{4.4a}$$

$$\leqslant 2e\left(|y|\int\limits_0^{|y|}\frac{q(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + e^{\rho-1}|y|^\rho\int\limits_{|y|}^{\infty}\frac{q(t)}{t^{\rho+1}}\,\mathrm{d}t\right) - q(|z|) \tag{4.4b}$$

и принадлежит классу $\mathrm{Ent}[\rho,\sigma]$, *где*

$$\sigma := 2e^\rho\int\limits_0^{\infty}\frac{q(t)}{t^{\rho+1}}\,\mathrm{d}t\,. \tag{4.5}$$

Теоремы B, D, E, как и теорема 2, тривиальны, если функция q растет не быстрее логарифмической функции, поскольку в этом случае достаточно взять целую функцию вида $f(z) = (c\sin\varepsilon z)/p(z)$, $z \in \mathbb{C}$, где $c, \varepsilon > 0$ — достаточно малые числа, а p — многочлен достаточно большой степени с нулями в нулях функции $\sin\varepsilon z$. Поэтому дополнительное ограничение

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{q(t)}{\log t} = +\infty \tag{4.6}$$

не умаляет общности рассуждений, которые предоставляет

Доказательство. Если существует такое число $R > 0$, что теорема 2 справедлива для возрастающих функций q, удовлетворяющих условию

$$q(t) \equiv 0 \ \text{ на } [0, R], \tag{4.7}$$

то теорема 2 справедлива в целом, т.е. уже для любых возрастающих функций q, для которых выполнены условия этой теоремы. Действительно, в условиях теоремы в роли функции, удовлетворяющей условиям (4.7), можно взять функцию $(q(t) - C)^+$, $t \geqslant 0$, где $C \geqslant 0$ — достаточно большое число. Тогда из справедливости (4.4) для $(q - C)^+$ в роли q следует выполнение (4.4) для q с целой функцией $fe^{-C} \not\equiv 0$ в качестве f.

Выбор числа $R>0$ из (4.7) указывается ниже по мере необходимости.

Будем сначала считать, что $q\equiv 0$ в некоторой правой окрестности нуля.

Пусть $\mu\in\mathcal{J}_0$. С целью применить следствие 4, т.е. проверки условия (3.5), введем в рассмотрение два интеграла

$$I_- + I_+ \overset{(2.4\mathrm{m})}{:=} \int\limits_0^\infty q(r)\,\mathrm{d}\mu^*(r) + \int\limits_0^\infty \bigl(-q(r)\bigr)\,\mathrm{d}\mu^*(r) = 0. \tag{4.8}$$

Наша задача — оценить сверху интеграл I_+ некоторым интегралом по инверсии считающей функции Левина–Цудзи $\mathfrak{n}^*_\mu$ от определенного преобразования функции q. Интегрирование по частям дает равенство

$$I_+ = -\int\limits_0^\infty q(r)\,\mathrm{d}\mu^*(r) = \int\limits_0^\infty \mu^*(r)\,\mathrm{d}q(r). \tag{4.9}$$

Отсюда согласно неравенству (2.6n) следствия 2 в силу возрастания $q\in\mathcal{C}_2$

$$\begin{aligned} I_+ &\overset{(2.6\mathrm{n})}{\leqslant} 2e^2\int\limits_0^\infty \frac{1}{r^2}\int\limits_0^{r/e}\int\limits_t^\infty \mathfrak{n}^*_\mu(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}q(r)\\ &= 2e^2\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{r/e}\int\limits_t^\infty \mathfrak{n}^*_\mu(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\Bigl(-\int\limits_r^{+\infty}\frac{\mathrm{d}q(t)}{t^2}\Bigr). \end{aligned}$$

Интегрирование по частям последнего внешнего интеграла дает неравенство

$$\begin{aligned} I_+ &\leqslant 2e\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_r^\infty \frac{\mathrm{d}q(t)}{t^2}\right)\left(\int\limits_{r/e}^\infty \mathfrak{n}^*_\mu(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}r\\ &= 2e\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{r/e}^\infty \mathfrak{n}^*_\mu(s)\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}\left(\int\limits_0^r\int\limits_t^\infty \frac{\mathrm{d}q(s)}{s^2}\,\mathrm{d}t\right). \end{aligned}$$

Еще одно интегрирование по частям влечет за собой неравенство

$$\begin{aligned} I_+ &\leqslant 2\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^r\int\limits_t^\infty \frac{\mathrm{d}q(s)}{s^2}\,\mathrm{d}t\right)\mathfrak{n}^*_\mu(r/e)\,\mathrm{d}r\\ &= 2\int\limits_0^\infty \mathfrak{n}^*_\mu(y/e)\,\mathrm{d}\left(\int\limits_0^y\int\limits_0^r\int\limits_t^\infty \frac{\mathrm{d}q(s)}{s^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r\right). \end{aligned}$$

Следующая серия интегрирований по частям дает необходимое неравенство

$$
\begin{aligned}
I_+ \leqslant -2\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^{ey}\int\limits_0^{r}\int\limits_t^{\infty} \frac{\mathrm{d}q(s)}{s^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\mathfrak{n}^*_\mu(y) \\
\overset{(4.3)}{=} -\int\limits_0^\infty 2\int\limits_0^{ey}\left(\int\limits_0^{r}\frac{q(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + 2r\int\limits_r^\infty \frac{q(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\mathfrak{n}^*_\mu(y) \\
= -\int\limits_0^\infty 2e\left(|y|\int\limits_0^{e|y|}\frac{q(t)}{t^2}\,\mathrm{d}s + e|y|^2\int\limits_{e|y|}^\infty \frac{q(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\mathfrak{n}^*_\mu(y) \\
= -\int\limits_0^\infty Q(|y|)\,\mathrm{d}\mathfrak{n}^*_\mu(y), \quad (4.10)
\end{aligned}
$$

где *в данном случае* положено

$$
Q(y) := 2e\left(y\int\limits_0^{ey}\frac{q(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + ey^2\int\limits_{ey}^\infty \frac{q(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t\right) \qquad (4.11a)
$$

$$
\leqslant 2e\left(y\int\limits_0^{y}\frac{q(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + e^{\rho-1}y^\rho\int\limits_{y}^\infty \frac{q(t)}{t^{\rho+1}}\,\mathrm{d}t\right) \qquad (4.11b)
$$

$$
\leqslant 2e^\rho y^\rho\int\limits_0^\infty \frac{q(t)}{t^{\rho+1}}\,\mathrm{d}t, \qquad y\in\mathbb{R}^+. \qquad (4.11c)
$$

При таком выборе Q из представления (4.8) и неравенства (4.10) следует, что

$$
0 = I_- + I_+ \leqslant \int\limits_0^\infty q(r)\,\mathrm{d}\mu^*(r) - \int\limits_0^\infty Q(y)\,\mathrm{d}\mathfrak{n}^*_\mu(y) \qquad (4.12)
$$

для любой меры Йенсена $\mu\in\mathcal{J}_0$. Последнее означает выполнение ключевого условия (3.5) следствия 4. Следовательно, существует целая функция $f_1\not\equiv 0$, которая при любом значении числа $\alpha>0$ и соответствующем выборе $d(z):=(1+|z|)^{-\alpha}$ удовлетворяет неравенству

$$
\begin{aligned}
\log|f_1(z)| \leqslant -q\bigl(|z|-(1+|z|)^{-\alpha}\bigr) + Q\bigl(|y|+(1+|y|)^{-\alpha}\bigr) \\
+ (3+\alpha)\log(1+|z|), \quad z=x+iy, \quad x,y\in\mathbb{R}, \quad |z|\geqslant(1+|z|)^{-\alpha}. \quad (4.13)
\end{aligned}
$$

Согласно (4.11c) для σ из (4.5) ввиду (4.13) имеем $f_1 \in \mathrm{Ent}[\rho, \sigma]$.

При дополнительном ограничении (4.6) целая функция f_1 порядка $\rho < 2$ в силу (4.13) имеет бесконечное число нулей.

$$\log|f_2(z)| \leqslant Q\big(|y| + (1+|y|)^{-\alpha}\big) - q\big(|z| - (1+|z|)^{-\alpha}\big), \quad |z| \geqslant (1+|z|)^{-\alpha}. \tag{4.14}$$

Рассмотрим функцию $q_\alpha \geqslant q$ на $\mathbb{R}^+$, определенную посредством тождества $q_\alpha\big(r - (1+r)^{-\alpha}\big) \equiv q(r)$, $r \geqslant (1+r)^{-\alpha}$. Функция q_α также возрастающая, поскольку строго возрастающей на $\mathbb{R}^+$ является функция $t(r) := r - (1+r)^{-\alpha}$. При этом начальное предположение "$q(t) \equiv 0$ *в некоторой правой окрестности нуля*" усилим до предположения "$q(t) \equiv 0$ *на отрезке* $[0, R]$ *при некотором* $R > 1$" (см. допустимое ослабление (4.7) условий теоремы 2). Тогда по построению $q_\alpha \equiv 0$ в некоторой правой окрестности нуля. Если $t = t(r)$, то $r = t + (1+r)^{-\alpha} > t$ и справедливы соотношения

$$q_\alpha(t) = q_\alpha\big(r - (1+r)^{-\alpha}\big) = q\big(r\big) = q\big(t + (1+r)^{-\alpha}\big) \leqslant q\big(t + (1+t)^{-\alpha}\big). \tag{4.15}$$

Таким образом, с самого начала в качестве функции q мы могли рассматривать функцию q_α. Тогда неравенство (4.14) переходит в неравенство

$$\log|f_2(z)| \leqslant Q_\alpha\big(|y| + (1+|y|)^{-\alpha}\big) - q(|z|) + \mathrm{const}, \quad \mathrm{z} \in \mathbb{C}, \tag{4.16}$$

где функция Q_α построена так же, как и Q в (4.11a), но с q_α в роли q.

Несколько утомительная процедура замены переменной и оценок, которую здесь опускаем, показывает, что в силу свойства (4.1) при выборе достаточно большого значения α (например, "с запасом" $\alpha = 5$ и еще на этапе (4.13)) имеет место неравенство

$$Q_1\big(y + (1+y)^{-\alpha}\big) \leqslant Q(y) + \mathrm{const}, \quad \mathrm{y} \in \mathbb{R}^+. \tag{4.17}$$

Полагая $f = cf_2$, где $c > 0$ — достаточно малое число, из (4.16) получаем требуемую оценку (4.4a).

Элементарный переход от (4.4a) к (4.4b) уже отмечен в (4.11a)–(4.11b).

Очевидно, рассматривая предварительно функцию $q/2$ вместо q, для четной функции $f(z)f(-z)$ получаем неравенства (4.4). ∎

Замечание 1. *По доказательству теоремы 2 нетрудно проследить, что до формулы* (4.13) *можно допускать и значение* $\rho = 2$, *а при продолжении доказательства с таким* $\rho = 2$ *заключительные оценки* (4.4) *отличаются добавками лишь логарифмических слагаемых* $8\log(1+|z|)$. *По-видимому, точные значения для постоянных* A_ρ *в теореме E неизвестны.*

Замечание 2. *Если в доказательстве теоремы 2 вместо следствия 4, основанного через [32, лемма 2.2] на методе $\overline{\partial}$-задачи Л. Хермандера, при переходе от субгармонической миноранты $\mathfrak{M}M$ к целой функции-миноранте f использовать более конструктивный ККК-аппроксимационный метод (см. [11, п. 10.5.5]), то, исходя непосредственно из следствия 3, можно построить целую функцию-миноранту f с нулями только на $\mathbb{R}\cup i\mathbb{R}$ и сразу четной с сохранением оценок* (4.4).

5. Миноранты для гладкой функции

Теорема 3. *Пусть $q\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, $q(0) = q'(0) = 0$, а функция*

$$\frac{(tq'(t))'}{t} = q''(t) + \frac{1}{t}\,q'(t) = o(1), \quad t \to +\infty, \tag{5.1}$$

убывающая. Тогда найдется четная целая функция $f \not\equiv 0$ из класса $\mathrm{Ent}[2,0]$, *которая удовлетворяет неравенству*

$$\log|f(z)| \leqslant |y| \int\limits_0^{|y|} \frac{q(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + q(|y|) - q(|z|), \quad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

Доказательство. Так же, как и при доказательстве теоремы 2, для $\mu \in \mathcal{J}_0$ с помощью интегрирования по частям будем оценивать интеграл I_+ из (4.9):

$$I_+ = \int\limits_0^\infty \mu^*(r)\,\mathrm{d}q(r) = \int\limits_0^\infty \mu^*(r) q'(r)\,\mathrm{d}r = \int\limits_0^\infty rq'(r)\,\mathrm{d}\left(-\int\limits_r^\infty \frac{\mu^*(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right)$$
$$\overset{(2.4\mathrm{N})}{=} \int\limits_0^\infty N_\mu^*(r)\,\mathrm{d}\bigl(rq'(r)\bigr) = \int\limits_0^\infty \frac{\bigl(rq'(r)\bigr)'}{r}\,\mathrm{d}\left(\int\limits_0^r tN_\mu^*(t)\,\mathrm{d}t\right),$$

где последний интеграл в скобках под знаком дифференциала — ограниченная функция. Отсюда интегрирование по частям с учетом условия (5.1) дает

$$I_+ = -\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^r tN_\mu^*(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}\frac{\bigl(rq'(r)\bigr)'}{r}\,. \tag{5.3}$$

По условию убывания функции под знаком дифференциала d в правой части (5.3) можем воспользоваться неравенством (2.6N) следствия 2, что дает

$$\begin{aligned} I_+ &\leqslant -\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^y \int\limits_t^\infty \mathfrak{n}^*_\mu(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}\frac{\big(yq'(y)\big)'}{y} \\ &= \int\limits_0^\infty \frac{\big(yq'(y)\big)'}{y} \int\limits_y^\infty \mathfrak{n}^*_\mu(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^\infty \int\limits_y^\infty \mathfrak{n}^*_\mu(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\int\limits_0^y \frac{\mathrm{d}\big(tq'(t)\big)}{t} \\ &= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^y \frac{\mathrm{d}\big(tq'(t)\big)}{t}\,\mathfrak{n}^*_\mu(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^\infty \mathfrak{n}^*_\mu(y)\,\mathrm{d}\left(\int\limits_0^y \int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}\big(sq'(s)\big)}{s}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= -\int\limits_0^\infty Q(y)\,\mathrm{d}\mathfrak{n}^*_\mu(y), \qquad \text{где} \qquad Q(y) := \int\limits_0^y \int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}\big(sq'(s)\big)}{s}\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Отсюда при *данном выборе* функции Q получаем неравенство (4.12) для любой меры Йенсена $\mu \in \mathcal{J}_0$. Следовательно, выполнено условие (3.5) следствия 4 и существует целая функция $f_1 \not\equiv 0$, удовлетворяющая при любом $\alpha \geqslant 0$ неравенству (4.13).

Из определения (5.4) функции Q интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} Q(y) &= \int\limits_0^y \left(q'(t) + \int\limits_0^t \frac{q'(s)}{s}\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}t = q(y) + \int\limits_0^y \left(\int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}q(s)}{s}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= q(y) + \int\limits_0^y \frac{q(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^y \int\limits_0^t \frac{q(s)}{s^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = q(y) + y\int\limits_0^y \frac{q(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t, \quad y \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Отсюда и из условия (5.1) легко следует, что $Q(y) = o(y^2)$, т.е. целая функция f_1 из (4.13) принадлежит классу $\mathrm{Ent}[2,0]$. Это позволяет так же, как при доказательстве теоремы 2, убрать логарифмического слагаемое в правой части (4.13) и перейти к целой функции $f_2 \not\equiv 0$, удовлетворяющей неравенству (4.14), а затем и к (4.16), где функция Q_α построена так же, как и Q в (5.4), но с функцией q_α в роли q, где $q_\alpha\big(r-(1+r)^{-\alpha}\big) \equiv q(r)$ при $r \geqslant r-(1+r)^{-\alpha}$. Условие (5.1) вкупе с заменой переменной в интеграле из определения функции Q в (5.4) также позволяет получить (4.17). Полагая $f = cf_2$, где $c > 0$ — достаточно малое число, получаем требуемую для (5.2) функцию f. Переход к четной функции таков же, как в конце доказательства теоремы 2. ■

Заключительные замечания. *В теореме 3 можно требовать дважды дифференцируемости функции q и убывания функции из* (5.1) *только для* *достаточно больших t. Однако доказательство в этом случае неожиданным образом существенно усложняется, поскольку при интегрировании по частям вплоть до* (5.4) *постоянно появляются дополнительные слагаемые и для контроля над ними приходится привлекать более сильные теоремы из [32] или [3] о наибольшей субгармонической миноранте.*

К доказательству теоремы 3 всецело относится замечание 2 из разд. 4.

Если в теореме 3 продолжить функцию q на $\mathbb{C}$ как $q(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, то условие регулярности (5.1) *означает, что плотность меры Рисса субгармонической функции $q(|\cdot|)$ в точке убывает до нуля при стремлении этой точки к бесконечности, поскольку слева в* (5.1) — *оператор Лапласа этой радиальной функции в полярных координатах.*

Основным препятствием для переноса на случай порядка $\rho > 2$ метода доказательства теорем 2 и 3 является отсутствие оценок типа Мацаева–Островского–Содина для положительных канонических интегралов Адамара–Вейерштрасса рода $p > 1$ и существенного для оценок таких интегралов обобщения оценки Левина–Островского интегралов от характеристики Неванлинны через характеристику Левина–Цудзи (см. [10, гл. IV, лемма 5.2], [36], [1, лемма 5]). Это делает актуальным получение подобных обобщений результатов статьи [1]. Такое развитие работы [1] может потребовать введения новых характеристик роста субгармонических функций.

Список литературы

[1] *V. Matsaev, I. Ostrovskii, and M. Sodin*, Variation on the theme of Marcinkevicz' inequality. — *J. d'Analyse Math.* (2002), v. 86, p. 289–317.

[2] *V. Matsaev, I. Ostrovskii, and M. Sodin*, The Hilbert transform, rearrangements and logarithmic determinants. In: Banach Center Publications (W. Zelazko, Ed.) Polish Academy of Sciences, (2002), p. 95–105.

[3] *Б.Н. Хабибуллин*, Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. — *Изв. РАН. Сер. мат.* (2001), т. 65, № 5, с. 167–190.

[4] *P. Koosis*, La plus petite majorante surharmonique et son rapport avec l'existence des functions entiéres de type exponentiel jouant le rôle de multiplicateurs. — *Ann. Inst. Fourier* (1983), t. 33, No. 1, p. 67–107.

[5] *P. Koosis*, The logarithmic integral. V. II. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1992).

[6] *P. Koosis*, Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin. Les Publications CRM, Montréal (1996).

[7] *Л. Шварц*, Анализ. Т. I. Наука, Москва (1967).

[8] *Б.Я. Левин*, Распределение корней целых функций. Физматгиз, Москва (1956).

[9] *B.Y. Levin*, Lectures on entire functions. Transl. Math. Monographs, V. 150. Amer. Math. Soc., Providence, RI (1996).

[10] *А.А. Гольдберг, И.В. Островский*, Распределение значений мероморфных функций. Наука, Москва (1970).

[11] *W.K. Hayman*, Subharmonic functions. V. II. Acad. Press, London (1989).

[12] *N. Wiener and R. Paley*, Fourier transforms in the complex domain. AMS N. Y. (1934); Преобразование Фурье в комплексной области. Наука, Москва (1964).

[13] *A.E. Ingham*, A note on Fourier transforms. — *J. London Math. Soc.* (1934), v. 9, p. 29–32.

[14] *R.M. Redheffer*, Ganze Funktionen und Vollständigkeit. — *Österreichische Akad. der Wissen.* (1957), v. 6, p. 96–99.

[15] *R.M. Redheffer*, Completeness of sets of complex exponentials. — *Adv. Math.* (1977), v. 24, p. 1–62.

[16] *W.A.J. Luxemburg and J. Korevaar*, Entire functions and Müntz-Szász type approximation. — *Trans. Amer. Math. Soc.* (1971), v. 157, p. 23–37.

[17] *G. Björk*, Linear partial operators and generalized distributions. — *Arkiv för Mat.* (1966), v. 6, p. 351–407.

[18] *X. Komatsu*, Ultradistributions. I. — *Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA* (1973), v. 20, No. 1, p. 25–105.

[19] *S. Abdullah*, Convolution equations in Beurling's distributions. — *Acta Math. Hung.* (1988), v. 52, No. 1–2, p. 7–20.

[20] *Б.Н. Хабибуллин*, О целых функциях класса Картрайт в $\mathbb{C}^n$. — В сб.: Линейные операторы в комплексном анализе. РГУ, Ростов-на-Дону (1994), с. 103–112.

[21] *A. Beurling and P. Malliavin*, On Fourier transforms of measures with compact support. — *Acta Math.* (1962), v. 107, p. 291–309.

[22] *P. Malliavin*, On the multiplier theorem for Fourier transforms of measures with compact support. — *Arkiv för Mat.* (1979), v. 17, p. 69–81.

[23] *V.P. Havin and B. Jöricke*, The uncertainly principle in harmonic analysis. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg (1994).

[24] *L. de Branges*, Hilbert spaces of entire function. Prentise Hall, New York (1968).

[25] *V. Matsaev and M. Sodin*, Distribution of Hilbert transforms of measures. — *Geom. Funct. Anal.* (2000), v. 10, p. 160–184.

[26] *S. Mandelbrojt*, Transformée de Fourier de fonctions entiéres et séries de Dirichlet: un principle de dualité. — *J. Analyse Math.* (1963), t. 10, p. 381–404.

[27] *V. Katznelson and S. Mandelbrojt*, Quelques classes de fonctions entiéres. Le probléme de Gelfand et Shilov. — *C. r. Acad. Sci.* (1963), t. 257, No. 2, p. 345–348.

[28] *V. Katznelson and S. Mandelbrojt*, Fonctions entirés et le problème de Gelfand et Šilov. — *J. Analyse Math.* (1965), t. 15, p. 263–279.

[29] *А.А. Гольдберг, Б.Я. Левин, И.В. Островский*, Целые и мероморфные функции. — Итоги ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления (1991), т. 85, с. 5–185.

[30] *T.W. Gamelin*, Uniform algebras and Jensen measures. — Cambridge Univ. Press, Cambridge (1978).

[31] *Б.Н. Хабибуллин*, Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной. — *Изв. АН СССР. Сер. мат.* (1991), т. 55, № 5, с. 1101–1123.

[32] *Б.Н. Хабибуллин*, Теорема о наименьшей мажоранте и ее применения. I. Целые и мероморфные функции. — *Изв. РАН. Сер. мат.* (1993), т. 57, № 1, с. 129–146.

[33] *B.N. Khabibullin*, Dual approach to certain questions for the weighted spaces of holomorphic functions. In: Israel Math. Conf. Proc. "Entire Functions in Modern Analysis", Tel-Aviv, 1997 (2001), v. 15, p. 207–219.

[34] *T.J. Ransford*, Jensen measures. In: Approximation, complex analysis and Potential Theory. Proc. NATO Adv. Stud. Inst. (Quebec, Canada, N.U. Arakelyan and P.M. Gauthier, Eds.). NATO Science. Ser. II, v. 37, Kluwer Acad. Publisher, Dordrecht–Boston (2001), p. 221–237.

[35] *Б.Н. Хабибуллин*, Критерии (суб-)гармоничности и продолжение (суб-)гармонических функций. — *Сиб. мат. журн.* (2003), т. 44, № 4, с. 905–925.

[36] *Б.Я. Левин, И.В. Островский*, О зависимости роста целой функции от расположения нулей ее производных. — *Сиб. мат. журн.* (1960), т. 1, № 3, с. 427–455.

Entire minorizing functions: an experience of application of Matsaev–Ostrovskii–Sodin's estimates

B.N. Khabibullin

Let q be a positive function on the positive semi-axis of the complex plane $\mathbb{C}$. Special estimates for positive subharmonic canonical integral of genus 1 and for their Riesz measures from recent work of V.I. Matsaev, I.V. Ostrovskii, and M.I. Sodin are applied to the proof of existence an entire function $f(z) \not\equiv 0$, $z \in \mathbb{C}$, with certain restriction of growth of $|f|$ on $\mathbb{C}$, such that $|f(x)| \leqslant e^{-q(|x|)}$ at all $x \in \mathbb{R}$.