Математическая физика, анализ, геометрия
2005, т. 12, № 1, с. 3–24

Об устойчивости решений квадратичных систем дифференциальных уравнений на конусе

С.А. Волкова

*Украинский государственный химико-технологический университет
пр. Гагарина, 8, Днепропетровск, 49005, Украина*

E-mail:s.volkova@excite.com

Статья поступила в редакцию 26 января 2004 г.
Представлена В.И. Коробовым

Получены новые достаточные условия условной устойчивости тривиального решения системы обыкновенных квадратичных дифференциальных уравнений. Для однородных систем указаны также области нелокальной условной устойчивости (конусы), которые затем используются для синтеза кусочно-линейных (разрывных) законов управления по выходу для билинейных систем управления любого порядка. При этом замкнутая такой разрывной обратной связью система становится глобально устойчивой в смысле Ляпунова на всем пространстве состояний. Приводятся примеры.

Одержано нові достатні умови умовної стійкості тривіального розв'язку системи звичайних квадратичних диференційних рівнянь. Для однорідних систем вказано також області нелокальної умовної стійкості (конуси), що потім використовуються для синтезу кусково-лінійних (розривних) законів керування по виходу для білінійних систем керування будь-якого порядку. При цьому замкнена таким розривним зворотнім зв'язком система стає глобально стійкою в значенні Ляпунова на всьому просторі станів. Наводяться приклади.

1. Введение

Задача синтеза линейной обратной связи для билинейных систем управления была исследована в [1, 2]. При этом замкнутая такой обратной связью система управления оказывалась квадратичной системой дифференциальных уравнений. В дальнейшем изучалось поведение решений упомянутой системы в зависимости от изменений коэффициентов, стоящих при квадратичных

Mathematics Subject Classification 2000: 93B05, 93B27.

членах в правой части. В [1, 2] отмечалось, какую важную роль в исследовании условной устойчивости замкнутой системы играет ее однородная квадратичная часть. Тем не менее в [1, 2] без ответа остались два важных вопроса: всегда ли для регулярной однородной квадратичной системы обыкновенных дифференциальных уравнений существует непустая область условной устойчивости и как следует проектировать обратную связь для билинейной системы, чтобы тривиальное решение оказалось устойчивым по Ляпунову при любых начальных данных. Настоящая работа посвящена ответам на эти вопросы.

Рассмотрим систему управления, уравнение состояний которой имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\mathbf{A}_i + \sum_{i=n+1}^{m+n} u_{i-n}(t)\mathbf{A}_i)\mathbf{x}(t), \tag{1}$$

где

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbf{R}^n,\ \mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T \in \mathbf{R}^m;$$

а уравнение наблюдений – форму

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_p(t))^T \in \mathbf{R}^p,\ \mathbf{y}(0) = (y_{10}, \dots, y_{p0})^T. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$, $\mathbf{R}^p$ — вещественные векторные пространства вектор-столбцов размерностей, соответственно, n, m, p; $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ — векторы состояний, входов и выходов; $\mathbf{y}(0)$ — вектор начальных измерений; $\mathbf{A}_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$; $\mathbf{C} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ — вещественные линейные отображения соответствующих вещественных пространств; $i = 0, \dots, n+m$; t — время. (Если $\mathbf{A}_i = 0\ \forall i \in \{1, \dots, n\}$, то система (1) называется билинейной системой управления.)

В дальнейшем мы будем продолжать решать задачу, исследование которой было начато в [1, 2]. Однако понятие условной устойчивости будет несколько расширено.

Введем в систему (1) линейную обратную связь по выходу $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{y}(t)$, где оператор $\mathbf{K}$ задается в подходящих базисах пространств $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^p$ матрицей $K \in \mathbf{R}^{m\times p}$. Ясно, что замкнутая указанной обратной связью система (1), (2) превратится в систему квадратичных дифференциальных уравнений порядка n относительно вектора неизвестных $\mathbf{x}^T(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbf{R}^n$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \sum_{j=1}^{n} d_{1j}x_j(t) + \mathbf{x}^T(t)B_1\mathbf{x}(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n(t) = \sum_{j=1}^{n} d_{nj}x_j(t) + \mathbf{x}^T(t)B_n\mathbf{x}(t). \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $A_0 = (d_{ij}), B_1, \ldots, B_n \in \mathbf{R}^{n\times n}$ — некоторые вещественные матрицы, причем матрицы $B_1, \ldots, B_n$ — симметрические, зависящие от элементов матрицы K.

Для системы (3) выпишем соответствующую ей систему однородных квадратичных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \mathbf{x}^T(t)B_1\mathbf{x}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n(t) = \mathbf{x}^T(t)B_n\mathbf{x}(t) \end{cases} \tag{4}$$

с вектором начальных условий $\mathbf{x}^T(0) = \mathbf{x}_0^T = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$.

Определение 1. *Замкнутая область $\Theta \subset \mathbf{R}^n$, содержащая начало координат, называется конусом, если $\forall \mathbf{x} \in \Theta$ и $\forall \lambda \geq 0$ $\lambda\mathbf{x} \in \Theta$. (Образующими этого конуса являются полупрямые, выходящие из начала координат.) Конус называется тривиальным, если в $\mathbf{R}^n$ найдется собственное подпространство $\mathcal{D}$ ($dim_{\mathbf{R}}\mathcal{D} < n$) такое, что $\Theta \subset \mathcal{D}$.*

Обозначим через $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ решение системы (4) с вектором начальных значений $\mathbf{x}_0$. Введем также на $\mathbf{R}^n$ евклидову норму по известной формуле $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$, где $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ — скалярное произведение.

Определение 2. *Тривиальное решение $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ системы дифференциальных уравнений (4) называется условно асимптотически устойчивым относительно конуса Θ (тривиального или нет), если $\forall \mathbf{x}_0 \in \Theta$ выполняются следующие условия: $\forall t \geq 0$ $\|\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)\| < M$, где $M > 0$ — некоторая константа, и $\lim\limits_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)\| = 0$. При этом Θ называется конусом асимптотической устойчивости (тривиальным или нет).*

2. Условия существования нетривиального конуса устойчивости для системы (4)

Рассмотрим следующую систему вещественных квадратных уравнений относительно неизвестного вектора $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)^T$:

$$-v_1 = \mathbf{v}^T B_1 \mathbf{v}, \ldots, -v_n = \mathbf{v}^T B_n \mathbf{v}. \tag{5}$$

(В [2] показано, что в общем случае система (5) имеет ровно $2^n - 1$ ненулевых векторных решений (вообще говоря, комплексных).)

Определение 3. *Однородная квадратичная система (4) называется регулярной, если не существует действительных констант $\tau_1, \ldots, \tau_n$ (хотя бы одна из которых не равна нулю) таких, что $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ $\mathbf{x}^T(\tau_1 B_1 + \cdots + \tau_n B_n)\mathbf{x} = 0$; в противном случае (4) называется сингулярной или особой системой.*

Сделаем замену переменных в системе (4) по формуле $\mathbf{x}(t) = S\mathbf{w}(t)$, где $S \in \mathbf{C}^{n\times n}$ — некоторое невырожденное линейное преобразование. Тогда получим

$$\dot{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{w}_n(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{w}^T(t) S^T B_1 S \mathbf{w}(t) \\ \dots\dots \\ \mathbf{w}^T(t) S^T B_n S \mathbf{w}(t) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

В [1] показано, как с помощью замены $\mathbf{x}(t) = S\mathbf{w}(t)$ представить регулярную систему (4) в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{w}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p_{11}w_1(t) + ... + p_{1n}w_n(t))^2 \\ \dots\dots\dots \\ (p_{n1}w_1(t) + \cdots + p_{nn}w_n(t))^2 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где p_{ij} — некоторые, вообще говоря, комплексные числа.

Ослабим требования к преобразованию S. Пусть теперь $S \in \mathbf{C}^{n\times n}$ есть преобразование перехода $\mathbf{x}(t) = S\mathbf{w}(t)$ от регулярной системы (4) к системе

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{w}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_1(\mathbf{w}(t)) \\ -F_2(\mathbf{w}(t)) \\ \dots\dots\dots\dots \\ ... - s w_n^2(t) \equiv -F_n(\mathbf{w}(t)) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $F_1(\mathbf{w}), \dots, F_n(\mathbf{w})$ — некоторые квадратичные формы, причем $F_n(\mathbf{w})$ — положительно определена и $s > 0$. (Таким образом, система (7) является частным случаем системы (8).)

Определение 4. *Регулярная система (4) называется* $\mathbf{R}$*-системой, если существует вещественное преобразование S, приводящее систему (4) к форме (8).*

Сразу же заметим, что регулярная система (4) будет $\mathbf{R}$-системой тогда и только тогда, когда найдутся вещественные числа $\tau_1, \dots, \tau_n$ такие, что матрица $(\tau_1 B_1 + \cdots + \tau_n B_n)$ будет строго положительно (или отрицательно) определенной. (Действительно, после замены переменной $\mathbf{x}(t) = S\mathbf{w}(t)$ любая из квадратичных форм, стоящих в правой части системы (6), имеет вид $S^T(\rho_1 B_1 + \cdots + \rho_n B_n)S$, где $(\rho_1, \dots, \rho_n)$ — соответствующая строка матрицы S^{-1}. Замечание, приведенное выше, следует теперь из того, что квадратичные формы, которые построены по матрицам $(\rho_1 B_1 + \cdots + \rho_n B_n)$ и $S^T(\rho_1 B_1 + \cdots + \rho_n B_n)S$, имеют одинаковое число положительных квадратов.)

Покажем на конкретных примерах, что понятие регулярности играет в дальнейшем существенную роль.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = x_1(x_1 + bx_2) \\ \dot{x}_2(t) & = -x_2(x_1 + bx_2) \end{cases} \qquad (9)$$

с начальными данными x_{10}, x_{20}.

Введем обозначение $c = x_{10}x_{20}$. Тогда решение системы (9) зависит от знака числа bc. Имеем

$$1) bc > 0 : x_1(t) = \sqrt{bc}\,\mathrm{tg}(t\sqrt{bc}), x_2(t) = c\left(\sqrt{bc}\,\mathrm{tg}(t\sqrt{bc})\right)^{-1};$$

$$2) bc < 0 : x_1(t) = \sqrt{|bc|}\frac{1 + \exp{(2t\sqrt{|bc|})}}{1 - \exp{(2t\sqrt{|bc|})}}, x_2(t) = \frac{c}{\sqrt{|bc|}} \times \frac{1 - \exp{(2t\sqrt{|bc|})}}{1 + \exp{(2t\sqrt{|bc|})}}.$$

Легко проверить, что если $b \neq 0$, то в случае 1) система (9) имеет только тривиальный конус асимптотической устойчивости $\Theta = \{x_{10} = 0, x_{20} = 0\}$. (Действительно, если $c = 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = 0$.) В случае 2) при $c = 0$ существует только тривиальный конус асимптотической устойчивости $\Theta = \{x_{10} = 0, x_{20} = 0\}$ (опять же $\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = 0$); если же $c \neq 0$, то система (9) неустойчива. (Существует точка $t^* \in [0,\infty)$ такая, что $1 - \exp{(2t^*\sqrt{|bc|})} = 0$.)

Пример 2. Рассмотрим теперь систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = -x_1^2 \\ \dot{x}_2(t) & = x_1^2 \end{cases} \qquad (10)$$

с начальными данными x_{10}, x_{20}.

Тогда

$$x_1(t) = \frac{x_{10}}{1 + x_{10}t}, x_2(t) = x_{10} + x_{20} - \frac{x_{10}}{1 + x_{10}t}.$$

Если $x_{10} + x_{20} \neq 0$, то система (10) устойчива, но не асимптотически устойчива. Если же $x_{10} + x_{20} = 0$, то существует только тривиальный конус асимптотической устойчивости $\Theta = \{x_{10} \geq 0, x_{10} + x_{20} = 0\}$. (Это — полупрямая, выходящая из начала координат.)

Пример 3. Предположим, что матрицы $B_1, \ldots, B_n$ системы (4) удовлетворяют ограничению: существуют вещественные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ такие, что $\alpha_1 B_1 + \cdots + \alpha_n B_n = 0$. Тогда $\dot{x}_1(t) + \cdots + \dot{x}_n(t) = 0$ из системы (5) вытекает, что $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$. Таким образом, область устойчивости расположена на подпространстве $\mathbf{X}_0 = \{\alpha_1 x_{10} + \cdots + \alpha_n x_{n0} = 0\}$ размерности $n - 1$. Следовательно, нетривиальный конус асимптотической устойчивости не существует.

Отметим, что в примере 1 рассматриваемая система регулярна, но не $\mathbf{R}$-система; в примерах 2 и 3 системы нерегулярны. Таким образом, для указанных систем нетривиальный конус асимптотической устойчивости не существует. Именно это обстоятельство и оправдывает введение понятия регулярной системы.

Обозначим через $l(0 \le l \le 2^n - 1)$ число ненулевых вещественных решений регулярной системы (5).

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ — решение системы (4), зависящее от вектора начальных данных $\mathbf{x}_0$. Предположим, что это решение удовлетворяет условиям 1) и 2) определения 2. Тогда, если $l \ne 0$, существует тривиальный конус $\Theta \ne 0$ асимптотической устойчивости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Рассмотрим разложение вектор-функции $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ в ряд Тейлора

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}_0 + \frac{\mathbf{x}_0'}{1!}t + \cdots + \frac{\mathbf{x}_0^{(i)}}{i!}t^i + \cdots .$$

(Заметим, что в силу однородности правой части системы (4), все координаты вектор-функции $\mathbf{x}_0^{(i)}$ являются однородными полиномами степени $i+1$ относительно координат вектора $\mathbf{x}_0; i = 1, 2, \ldots$.)

Рассмотрим разложение в ряд Тейлора другого решения $\mathbf{x}(\lambda\mathbf{x}_0, t)$ системы (4), где λ — произвольный положительный параметр. Тогда в силу однородности координат вектор-функции $\mathbf{x}_0^{(i)}$ получим

$$\mathbf{x}(\lambda\mathbf{x}_0, t) = \lambda\mathbf{x}_0 + \lambda^2\frac{\mathbf{x}_0'}{1!}t + \cdots + \lambda^{i+1}\frac{\mathbf{x}_0^{(i)}}{i!}t^i + \cdots = \lambda\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, \lambda t).$$

Но по предположению $\forall t \ge 0$ $\|\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)\| < M$ и $\lim\limits_{t\to\infty}\|\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)\| = 0$. В результате в силу того, что $\lambda > 0$ (и, следовательно, $t^* = \lambda t > 0$) для функции $\mathbf{x}(\lambda\mathbf{x}_0, t)$ будем иметь

$$\|\mathbf{x}(\lambda\mathbf{x}_0, t)\| = \lambda\|\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, \lambda t)\| = \lambda\|\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t^*)\| < \lambda M$$

и

$$\lim_{t\to\infty}\|\mathbf{x}(\lambda\mathbf{x}_0, t)\| = \lambda\lim_{t^*\to\infty}\|\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t^*)\| = 0.$$

Отсюда следует, что любое множество векторов $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{R}^n$ таких, что $\forall\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}_0$, решение $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ системы (4) удовлетворяет условиям 1) и 2) определения 2, образует конус.

b) Осталось еще показать, что $\mathbf{X}_0 \neq 0$. По условию система (5) имеет по крайней мере одно ($l = 1$) нетривиальное вещественное решение $\mathbf{v}^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)^T$. Непосредственно проверяется, что вещественный вектор $\mathbf{v}(t) = ((v_1^*/(1+t), \ldots, v_n^*/(1+t))^T$ является решением системы (4). (Для этого решения вектором начальных данных $\mathbf{x}_0$ будет вектор $\mathbf{v}^*$.) Отсюда следует, что $\|\mathbf{v}(t)\| \leq \|\mathbf{v}^*\|$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{v}(t) = 0$. Таким образом, $\Theta = \mathbf{X}_0 = \mathbf{v}^* \neq 0$, что и завершает доказательство теоремы 1. ■

Вычислим все первые производные функций $z_1 = w_1/w_n, \ldots, z_{n-1} = w_{n-1}/w_n$. Тогда, учитывая (8), получим

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1}(t) \\ \dot{w}_n(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{-F_1(\mathbf{w})w_n + F_n(\mathbf{w})w_1}{w_n^2} = G_1(z_1(t), \ldots, z_{n-1}(t))w_n(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{-F_{n-1}(\mathbf{w})w_n + F_n(\mathbf{w})w_{n-1}}{w_n^2} = G_{n-1}(z_1(t), \ldots, z_{n-1}(t))w_n(t) \\ -F_n(z_1, \ldots, z_{n-1})w_n^2(t) \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

где $G_k(z_1, \ldots, z_{n-1})$ — кубические функции переменных $z_1, \ldots, z_{n-1}$; $k = 1, \ldots, n-1$.

Рассмотрим уравнения

$$G_1(z_1, \ldots, z_{n-1}) = 0, \ldots, G_{n-1}(z_1, \ldots, z_{n-1}) = 0. \qquad (12)$$

Обозначим через $\mathbf{z}_1^*, \ldots, \mathbf{z}_l^* \in \mathbf{R}^{n-1}; 1 \leq l \leq 2^n - 1$, все ненулевые вещественные решения системы (12) и введем в систему (11) новые переменные $\mathbf{y}_j$ по формулам $\mathbf{y}_j = \mathbf{z} - \mathbf{z}_j^*$; $j = 1, \ldots, l$. Тогда получим

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_{j1}(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_{j,n-1}(t) \\ \dot{w}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(y_{j1}(t), ..., y_{j,n-1}(t))w_n(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{n-1}(y_{j1}(t), \ldots, y_{j,n-1}(t))w_n(t) \\ -F_n(y_{j1} + z_{j1}^*, \ldots, y_{j,n-1} + z_{j,n-1}^*)w_n^2(t) \\ = -(f(\mathbf{y}_j) + s)w_n^2(t) \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

где $\mathbf{y}_j = (y_{j1}, \ldots, y_{j,n-1})^T$; $P_1(\mathbf{y}_j) = \cdots = P_{n-1}(\mathbf{y}_j) = 0$, если $\mathbf{y}_j = \mathbf{0}$; $f(\mathbf{y}_j)$ — неотрицательная квадратичная функция ($f(\mathbf{0}) = 0$) от координат вектора $\mathbf{y}_j \in \mathbf{R}^{n-1}$ и вещественное число $s > 0$ предполагаются известными; $j = 1, \ldots, l$.

Теорема 2. *Предположим, что система (4) является* $\mathbf{R}$*-системой. Тогда для существования нетривиального конуса асимптотической устойчивости достаточно, чтобы для некоторого* $j \in \{1, \dots, l\}$ *тривиальное решение системы*

$$\dot{\mathbf{y}}_j(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}_{j1}(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_{j,n-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(y_{j1}(t), \dots, y_{j,n-1}(t)) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ P_{n-1}(y_{j1}(t), \dots, y_{j,n-1}(t)) \end{pmatrix} \tag{14}$$

было асимптотически устойчивым.

Доказательство. Для простоты положим $y_{j1} = y_1, \dots, y_{j,n-1} = y_{n-1}$, $w_n = w$ и $w_{n0} = w_0 > 0$. Обозначим через $\Omega \in \mathbf{R}^{n-1}$ некоторую открытую область, содержащую начало координат. Из условий теоремы вытекает существование функции Ляпунова $V(y_1, \dots, y_{n-1})$ для системы (14) [3]. Таким образом, для любого ненулевого вектора $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{n-1})^T \in \Omega$

$$V(y_1, \dots, y_{n-1}) > 0,$$
$$\frac{\partial V(y_1, \dots, y_{n-1})}{\partial y_1} \cdot \dot{y}_1 + \dots + \frac{\partial V(y_1, \dots, y_{n-1})}{\partial y_{n-1}} \cdot \dot{y}_{n-1} < 0.$$

Рассмотрим решение последнего уравнения системы (13):

$$w(t) = \frac{w_0}{1 + w_0 \int\limits_0^t (f(\mathbf{y}_j)(\tau) + s)d\tau}.$$

Отсюда видно, что если $w_0 > 0$, то $\forall t \in [0, \infty)$ $w = w(t) > 0$.

С учетом вида $w(t)$ введем положительно определенную функцию $V_w = V(\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_{n-1}) + w^2$, где $\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_{n-1}$ — решения системы (13). Тогда в силу систем (13) и (14) имеем

$$\frac{\partial V_w}{\partial \overline{y}_1} \cdot \dot{\overline{y}}_1 + \dots + \frac{\partial V_w}{\partial \overline{y}_{n-1}} \cdot \dot{\overline{y}}_{n-1} + 2w \cdot \dot{w} = \frac{\partial V}{\partial y_1} \cdot \dot{y}_1 w + \dots + \frac{\partial V}{\partial y_{n-1}} \cdot \dot{y}_{n-1} w + 2w \cdot \dot{w} < 0,$$

если $\forall t \in [0, \infty)$ $w = w(t) > 0$.

Пусть теперь $w_0 < 0$. Тогда возможны три случая:

a) $\forall t \in [0, \infty) 1 + w_0 \int\limits_0^t (f(\mathbf{y}_j)(\tau) + s)d\tau > 0$. Следовательно, $w(t) < 0$, $\dot{V}_w > 0$ и тривиальное решение системы (13) неустойчиво.

b) $\exists t^* > 0$ такое, что $1 + w_0 \int\limits_0^{t^*} (f(\mathbf{y}_j)(\tau) + s)d\tau = 0$. Тогда $\lim\limits_{t \to t^*} w(t) = -\infty$.

c) $\forall t \in [0, \infty) 1 + w_0 \int\limits_0^t (f(\mathbf{y}_j)(\tau) + s) d\tau < 0$. Здесь возможны две ситуации: c1) функция $(f(\mathbf{y}_j)(\tau) + s)$ ограничена на $[0, \infty)$; таким образом, существует точка t^* такая, что $1 + w_0 \int\limits_0^t (f(\mathbf{y}_j)(\tau) + s) d\tau = 1 + w_0(f(\mathbf{y}_j)(t^*) + s)t$, и приходим к ситуации a) или b) и c2) $\lim\limits_{t \to \infty} (f(\mathbf{y}_j)(t) + s) = \infty$; тогда $\|\mathbf{y}_j\| \to \infty$, что противоречит асимптотической устойчивости системы (14). Следовательно, система (13) имеет нетривиальный конус $\Theta = \{w\Omega, w\}$ асимптотической устойчивости. Если вернуться к старым переменным, получим, что и система (4) также имеет нетривиальный конус асимптотической устойчивости. Это завершает доказательство теоремы 2. ∎

С практической точки зрения более полезным, чем теорема 2, может быть следующий результат. Ограничимся уравнениями первого приближения (последнее уравнение системы (13) оставим без изменения):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}_j(t) = w_n(t) H_j \mathbf{y}_j, \\ \dot{w_n}(t) = -F_n(y_{j1} + z^*_{j1}, \dots, y_{j,n-1} + z^*_{j,n-1}) w_n^2(t) = -(f(\mathbf{y}_j) + s) w_n^2(t), \end{cases} \tag{15}$$

где неотрицательная функция $f(\mathbf{y}_j)$ и вещественное число $s > 0$ являются известными; $H_j \in \mathbf{R}^{(n-1)\times(n-1)}$.

Следствие. *В условиях теоремы 2 для существования нетривиального конуса асимптотической устойчивости достаточно, чтобы хотя бы одна из матриц H_j была гурвицевой.*

Доказательство. 1) $n > 1$. Согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению [3], если матрица H_r гурвицева для некоторого $r \in \{1, \dots, l\}$, то решение системы $\dot{\mathbf{y}}_r(t) = H_r \mathbf{y}_r(t)$ асимптотически устойчиво.

Пусть теперь $\lim\limits_{t \to \infty} \dot{\mathbf{y}}_r = \mathbf{0}$. Тогда второе уравнение системы (15) при достаточно больших t стремится к уравнению $\dot{w_n}(t) = -s w_n^2(t)$. Решение же последнего уравнения имеет вид $w_n(t) = w_{n0}/(1 + s w_{n0} t)$. Таким образом, при начальном условии $w_{n0} \geq 0$ $w_n(t) \geq 0$ матрица $w_n(t) H_r$ остается гурвицевой (при $w_{n0} \neq 0$) и потому $\lim\limits_{t \to \infty} \dot{\mathbf{y}}_r(t) = \mathbf{0}$. Следовательно, система (15) асимптотически устойчива для $j = r$. Тогда согласно теореме Ляпунова [3] система (11), а значит, и система (4) будут локально асимптотически устойчивыми.

2) $n = 1$. В этом случае в системе (15) первое уравнение отсутствует, а второе имеет вид $w_1(t) = -s w_1^2(t)$. Решение последнего уравнения находится по формуле $w_1(t) = w_{10}/(1 + s w_{10} t)$. Таким образом, при $w_{10} \geq 0$ это решение асимптотически устойчиво. ∎

Заметим, что в случае асимптотической устойчивости вектор $\mathbf{x}^* = S\mathbf{w}_r^* \in \Theta \subset \mathbf{R}^n$, где вектор $\mathbf{w}_r^* = (\mathbf{z}_r^* w_{n0}, w_{n0})^T = (z_{r1}^* w_{n0}, \ldots, z_{r,n-1}^* w_{n0}, w_{n0})^T$, можно считать осью некоторого локального конуса устойчивости, принадлежащего конусу асимптотической устойчивости Θ .

Обратимся теперь к построению конуса устойчивости. Обозначим через $\mathcal{N}_k$ многообразие всех решений одного из уравнений (12)($k \in \{1, ..., n-1\}$). Предположим, что существует замкнутая ограниченная область $\mathcal{M}_r \subset \mathbf{R}^{n-1}$, граница которой образована многообразиями $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_{n-1}$, содержащая точку $\mathbf{z}_r^*$. По области $\mathcal{M}_r$ построим конус $\mathcal{K}_r = \{\mathbf{z}w_n, w_n\}^T \in \mathbf{R}^n$, где вектор $\mathbf{z}$ пробегает всю область $\mathcal{M}_r$, а переменная w_n — множество всех неотрицательных чисел. Тогда $\Theta \subset \mathcal{K}_r$.

3. Устойчивость системы (3)

В этом разделе будем считать, что матрица A_0 диагонализируема и все ее собственные числа имеют неположительную вещественную часть.

Обозначим через $L \in \mathbf{R}^{n\times n}$ линейное преобразование, приводящее матрицу A_0 к диагональному виду, и введем в систему (3) новую переменную $\mathbf{w}$ по формуле $\mathbf{x} = L\mathbf{w}$. Тогда получим

$$\dot{\mathbf{w}} = L^{-1}A_0L\mathbf{w} + \begin{pmatrix} (L\mathbf{x})^T B_1 L\mathbf{x} \\ \cdots\cdots \\ (L\mathbf{x})^T B_n L\mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 w_1 \\ \vdots \\ -\alpha_k w_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{w}^T H_1 \mathbf{w} \\ \cdots\cdots \\ \mathbf{w}^T H_k \mathbf{w} \\ \mathbf{w}^T H_{k+1} \mathbf{w} \\ \cdots\cdots \\ \mathbf{w}^T H_n \mathbf{w} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где $k = \mathrm{rang} A_0$.

Введем теперь в систему (16) новую переменную $\mathbf{z}$ по формуле

$$\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^T = \left(\frac{1}{w_1}, \ldots, \frac{1}{w_n}\right)^T.$$

Тогда после несложных преобразований получим

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_k \\ \dot{z}_{k+1} \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 z_1 \\ \vdots \\ \alpha_k z_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_1(z_1/z_1, \ldots, z_n/z_1) \\ \cdots\cdots \\ P_k(z_1/z_k, \ldots, z_n/z_k) \\ P_{k+1}(z_1/z_{k+1}, \ldots, z_n/z_{k+1}) \\ \cdots\cdots \\ P_n(z_1/z_n, \ldots, z_n/z_n) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где $P_k(z_1/z_k,\ldots,z_n/z_k)$ — квадратичная функция переменных $z_1/z_k,\ldots,z_n$ $/z_k$. (Так как $z_k/z_k\equiv 1$, то ясно, что в действительности переменных будет $n-1$.)

С помощью метода Лагранжа вариации произвольных постоянных [3] найдем решение системы (17), которое будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} z_1(t)\\ \vdots\\ z_k(t)\\ z_{k+1}(t)\\ \vdots\\ z_n(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\alpha_1 t)z_{10}\\ \vdots\\ \exp(\alpha_k t)z_{k0}\\ z_{k+1,0}\\ \vdots\\ z_{n,0}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int\limits_0^t \exp(\alpha_1(t-\tau))P_1(z_1/z_1,\ldots,z_n/z_1)d\tau\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \int\limits_0^t \exp(\alpha_k(t-\tau))P_k(z_1/z_k,\ldots,z_n/z_k)d\tau\\ \int\limits_0^t P_{k+1}(z_1/z_{k+1},\ldots,z_n/z_{k+1})d\tau\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \int\limits_0^t P_n(z_1/z_n,\ldots,z_n/z_n)d\tau \end{pmatrix}.$$

Если снова вернуться к переменным $w_1,\ldots,w_n$, то из последней системы можно получить решения $w_1(t),\ldots,w_n(t)$ по формулам

$$w_1(t)=\frac{w_{10}\exp(-\alpha_1 t)}{1+w_{10}\int\limits_0^t \exp(-\alpha_1\tau)P_1(w_1(\tau)/w_1(\tau),\ldots,w_1(\tau)/w_n(\tau))d\tau},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$w_k(t)=\frac{w_{k0}\exp(-\alpha_k t)}{1+w_{k0}\int\limits_0^t \exp(-\alpha_k\tau)P_k(w_k(\tau)/w_1(\tau),\ldots,w_k(\tau)/w_n(\tau))d\tau},$$

$$w_{k+1}(t)=\frac{w_{k+1,0}}{1+w_{k+1,0}\int\limits_0^t P_{k+1}(w_{k+1}(\tau)/w_1(\tau),\ldots,w_{k+1}(\tau)/w_n(\tau))d\tau},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$w_n(t)=\frac{w_{n0}}{1+w_{n0}\int\limits_0^t P_n(w_n(\tau)/w_1(\tau),\ldots,w_n(\tau)/w_n(\tau))d\tau}.$$

Теорема 3. *Предположим, что матрица A_0 системы (3) является диагональной. Пусть Θ — конус асимптотический устойчивости системы (4). Тогда если собственные числа матрицы A_0 неположительны, то условие $\mathbf{x}_0\in\Theta$ достаточно для асимптотической устойчивости системы (3).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью невырожденного преобразования L приведем систему (3) к виду (16).

Предположим, что система (4) имеет нетривиальный конус асимптотической устойчивости Θ. Тогда очевидно, что при $A_0 = 0$ однородная система (16) будет иметь конус асимптотической устойчивости $L^{-1}\Theta$.

Предположим теперь, что вектор начальных данных $\mathbf{w}_0 \in L^{-1}\Theta$. Тогда, как следует из формул для $w_1(t), \ldots, w_n(t)$, для любого $t \geq 0$ должны выполняться условия

$$1 + w_{k0} \int\limits_0^t P_k(w_k(\tau)/w_1(\tau), \ldots, w_k(\tau)/w_n(\tau))d\tau$$

$$= 1 + \int\limits_0^t H_k(\tau)d\tau > 0, k = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

В дальнейшем нам понадобится известная в математическом анализе теорема о среднем, классическая формулировка которой такова. *Пусть $\phi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции. Тогда если функция $\phi(t)$ знакопостоянна на $[a, b]$, то существует такая точка $\xi \in [a, b]$, для которой справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b \psi(t)\phi(t)dt = \psi(\xi) \int\limits_a^b \phi(t)dt.$$

Применим теорему о среднем к интегралу

$$\int\limits_0^t P_k(w_k(\tau)/w_1(\tau), \ldots, w_k(\tau)/w_n(\tau))d\tau.$$

Получим

$$\int\limits_0^t P_k(w_k(\tau)/w_1(\tau), \ldots, w_k(\tau)/w_n(\tau))d\tau$$

$$= P_k(w_k(\mu_t)/w_1(\mu_t), \ldots, w_k(\mu_t)/w_n(\mu_t))t$$

для некоторого $\mu_t \in (0, t)$, зависящего от t. Но так как $t \to \infty$, то для того чтобы выполнялось условие (18), необходимо

$$H_k(t) = w_{k,0}P_k(w_k(t)/w_1(t), \ldots, w_k(t)/w_n(t)) \geq 0, \, \forall t \in [\mu, \infty), \tag{19}$$

где $\mu > 0$ — наибольший из корней функции $P_k(w_k(t)/w_1(t), \ldots, w_k(t)/w_n(t))$.

Применим теперь теорему о среднем к интегралу

$$\int_0^t \exp(-\alpha_k\tau)P_k(w_k(\tau)/w_1(\tau),\dots,w_k(\tau)/w_n(\tau))d\tau.$$

Так как $\exp(-\alpha_k\tau)\geq 0$, то

$$\int_0^t \exp(-\alpha_k\tau)P_k(w_k(\tau)/w_1(\tau),\dots,w_k(\tau)/w_n(\tau))d\tau$$

$$= P_k(w_k(\xi_t)/w_1(\xi_t),\dots,w_k(\xi_t)/w_n(\xi_t))\int_0^t \exp(-\alpha_k\tau)d\tau$$

$$= P_k(w_k(\xi_t)/w_1(\xi_t),\dots,w_k(\xi_t)/w_n(\xi_t))\frac{1-\exp(-\alpha_k t)}{\alpha_k}$$

для некоторого $\xi_t\in(0,t)$, зависящего от t.

Величина $1-\exp(-\alpha_k t)\geq 0$. Поэтому, учитывая неравенство (19), получим

$$1+\int_\mu^t G_k(\tau)d\tau = 1+w_{k0}\int_\mu^t \exp(-\alpha_k\tau)P_k(w_k(\tau)/w_1(\tau),\dots,w_k(\tau)/w_n(\tau))d\tau > 0. \tag{20}$$

Теперь исследуем знак функции

$$1+\int_0^t G_k(\tau)d\tau = 1+w_{k0}\int_0^t \exp(-\alpha_k\tau)P_k(w_k(\tau)/w_1(\tau),\dots,w_k(\tau)/w_n(\tau))d\tau,$$

где $t\in[0,\mu]$.

Пусть $0\leq\lambda_{k1}<\dots<\lambda_{kr}=\mu$ — все вещественные корни функции $H_k(t)$, расположенные на интервале $[0,\mu]$. Тогда условия (18) можно переписать так:

$$1+\int_0^t H_k(\tau)d\tau = 1+\int_0^{\lambda_{k1}} H_k(\tau)d\tau+...+\int_{\lambda_{k,i-1}}^{\lambda_{ki}} H_k(\tau)d\tau+\int_{\lambda_{ki}}^t H_k(\tau)d\tau>0, \tag{21}$$

где $\mu\geq t\geq\lambda_{kr}; i\in\{1,\dots,r\}; k=1,\dots,n$.

Рассмотрим функции

$$1+\int_0^t G_k(\tau)d\tau = 1+\int_0^{\lambda_{k1}} G_k(\tau)d\tau+...+\int_{\lambda_{k,i-1}}^{\lambda_{kr}} G_k(\tau)d\tau+\int_{\lambda_{ki}}^t G_k(\tau)d\tau, \tag{22}$$

где $\mu \geq t \geq \lambda_{ki}; i \in \{1, \ldots, r\}; k = 1, \ldots, n$.

Заметим, что в (21) и (22) подынтегральная функция сохраняет в указанных пределах интегрирования свой знак. Поэтому можно применить теорему о среднем к каждому из интегралов, стоящих в правой части равенства (22):

$$1 + \int\limits_0^t G_k(\tau)d\tau = 1 + \exp(-\alpha_k\xi_1)\int\limits_0^{\lambda_{k1}} H_k(\tau)d\tau +$$

$$\cdots + \exp(-\alpha_k\xi_i)\int\limits_{\lambda_{k,i-1}}^{\lambda_{ki}} H_k(\tau)d\tau + \exp(-\alpha_k\xi_{i+1})\int\limits_{\lambda_{ki}}^{t} H_k(\tau)d\tau, \tag{23}$$

где $0 \leq \xi_1 < \cdots < \xi_{i+1} < t$ и, соответственно,

$$1 \geq \exp(-\alpha_k\xi_1) > \cdots > \exp(-\alpha_k\xi_{i+1}) > 0. \tag{24}$$

Рассмотрим два случая формулы (23): 1) $\int\limits_0^{\lambda_{k1}} H_k(\tau)d\tau > 0$ и 2) $\int\limits_0^{\lambda_{k1}} H_k(\tau)d\tau < 0$. Заметим, что в неравенствах (21) знаки интегралов, стоящих в правой части, чередуются; воспользуемся этим фактом для анализа случаев 1) и 2).

1) Перепишем условия (21) в следующем виде:

$$1 + \int\limits_0^t H_k(\tau)d\tau = 1 + \sum_{j=2}^{i}\left(\int\limits_{\lambda_{k,j-2}}^{\lambda_{k,j-1}} H_k(\tau)d\tau - |\int\limits_{\lambda_{k,j-1}}^{\lambda_{kj}} H_k(\tau)d\tau|\right) + \int\limits_{\lambda_{ki}}^{t} H_k(\tau)d\tau > 0. \tag{25}$$

Ясно, что в (25) каждая скобка, стоящая под знаком суммы, и последний интеграл, который присутствует только для нечетных i, будут неотрицательными.

Представим подобным образом и формулу (23)

$$1 + \int\limits_0^t G_k(\tau)d\tau$$

$$= 1 + \sum_{j=2}^{i}\left(\exp(-\alpha_k\xi_{j-1})\int\limits_{\lambda_{k,j-2}}^{\lambda_{k,j-1}} H_k(\tau)d\tau - \exp(-\alpha_k\xi_j)|\int\limits_{\lambda_{k,j-1}}^{\lambda_{kj}} H_k(\tau)d\tau|\right)$$

$$+ \exp(-\alpha_k\xi_{i+1})\int\limits_{\lambda_{ki}}^{t} H_k(\tau)d\tau. \tag{26}$$

Учитывая (24) и (25), из (26) получаем

$$1+\int\limits_{0}^{t} G_k(\tau)d\tau > 0 \ \forall t \in [0,\mu]. \tag{27}$$

2) Перепишем условия (21) в таком виде:

$$1+\int\limits_{0}^{t} H_k(\tau)d\tau = \left(1-\int\limits_{0}^{\lambda_{k,1}} H_k(\tau)d\tau\right)$$

$$+\sum_{j=3}^{i}\left(\int\limits_{\lambda_{k,j-2}}^{\lambda_{k,j-1}} H_k(\tau)d\tau - |\int\limits_{\lambda_{k,j-1}}^{\lambda_{kj}} H_k(\tau)d\tau|\right)+\int\limits_{\lambda_{ki}}^{t} H_k(\tau)d\tau > 0,$$

где так же, как и в (25), каждая скобка, стоящая под знаком суммы, и последний интеграл (он присутствует только для четных i) будут неотрицательными.

Дальнейший ход полностью повторяет доказательство неравенства (27). Следовательно, оно верно и в случае 2). Учитывая еще и неравенство (19), получаем, что (20) (так же, как и неравенство (27)) имеет место на всем интервале $[0,\infty)$. Но тогда $w_1(t)\to 0,\dots,w_n(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Последнее замечание и завершает доказательство теоремы 3. ■

4. Синтез законов управления, обеспечивающих асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1) в смысле Ляпунова

В предыдущем разделе была развита теория устойчивости квадратичных систем на конусе. При решении практических задач теории управления и, в частности, задачи синтеза законов управления для билинейных систем, устойчивость на конусе имеет ограниченную область применимости. Поэтому будет предложен метод, позволяющий синтезировать закон управления для системы (1), который обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы на всем пространстве $\mathbf{R}^n$. Суть этого метода заключается в том, что обратные связи K_i для системы (1) выбираются так, чтобы конусы $\Theta_i=\Theta_i(K_i)$ асимптотической устойчивости, зависящие от K_i, накрывали все пространство $\mathbf{R}^n$: $\mathbf{R}^n=\Theta_1\bigcup\cdots\bigcup\Theta_d$, где d – некоторое натуральное число.

Для дальнейшего нам потребуется небольшая модификация известной теоремы 8 [2].

Теорема 4. *Пусть для полной системы (4) выполнены условия:*

1) начальные данные $x_{i0} \geq 0$;

2) формы $(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)B_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)^T$ *положительно определены;*

3) найдутся положительные числа r_i *такие, что форма* $\mathbf{x}^T(\sum_{i=1}^{n} r_i B_i)\mathbf{x}$ *отрицательно определена;* $i = 1, \ldots, n$. *Тогда любое решение системы (4) условно асимптотически устойчиво.*

Следствие. *В условиях теоремы 4 коэффициент, стоящий при* x_i^2, $i = 1, \ldots, n$, *в форме* $\mathbf{x}^T B_i \mathbf{x}$, *всегда отрицательный.*

Таким образом, при выполнении условий теоремы 3 конус асимптотической устойчивости полной системы (4) (или (3)) содержит первый ортант.

Для построения этих конусов, введем в систему (1),(2) обратную связь по формуле $\mathbf{u} = K\mathbf{y}$, где матрица K выбирается из единственного условия: однородная квадратичная система должна быть полной. (Ясно, что уравнения (3) будут зависеть от элементов матрицы K.)

Исходя из теоремы 4, можно предложить следующий алгоритм синтеза.

4.1. Алгоритм

1. С помощью невырожденного преобразования $L \in \mathbf{R}^{n\times n}$ ввести в систему (4) новую переменную $\mathbf{w}$ по формуле $\mathbf{x} = L\mathbf{w}$:

$$\dot{\mathbf{w}} = L^{-1} \begin{pmatrix} (L\mathbf{w})^T(t)B_1(K)L\mathbf{w}(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (L\mathbf{w})^T(t)B_n(K)L\mathbf{w}(t) \end{pmatrix}. \tag{28}$$

(Для первоначального анализа можно считать, что $L = I$ — единичная матрица.)

2. Записать условия положительной определенности Сильвестра [3] для каждой из системы квадратичных форм

$$\begin{pmatrix} \mathbf{w}^T f_1(K, L)\mathbf{w} \\ \vdots \\ \mathbf{w}^T f_n(K, L)\mathbf{w} \end{pmatrix} = L^{-1} \begin{pmatrix} (0, w_2, ..., w_n)L^T B_1(K)L(0, w_2, \ldots, w_n)^T \\ \ldots\ldots\ldots \\ (w_1, \ldots, w_{n-1}, 0)L^T B_n(K)L(w_1, \ldots, w_{n-1}, 0)^T \end{pmatrix},$$

где $f_i(K, L)$ — матрица размеров $n \times n$; $i = 1, \ldots, n$.

3. Записать условия отрицательной определенности Сильвестра [3] для квадратичной формы

$$\mathbf{w}^T \sum_{i=1}^{n} r_i f_i(K, L)\mathbf{w},$$

где положительные числа $r_1, \ldots, r_n$ подлежат определению.

4. Найти любое решение системы, которая состоит из $(n-1)^2+n$ неравенств, получающихся из условий Сильвестра, относительно неизвестных матриц K, L и положительных чисел $r_1, \ldots, r_n$. Если решение отсутствует, то приостановить работу алгоритма.

Если решение существует, то согласно следствию теоремы 4, в i-м уравнении системы (28) коэффициент при x_i^2, $i=1,\ldots,n$, будет отрицательным и алгоритм может быть продолжен следующим способом.

5. Зафиксировать матрицу L из п. 4 и составить 2^n диагональных матриц $D_i = \mathrm{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1)$, у которых диагональные элементы принимают всевозможные значения $+1$ или -1.

6. В системе (28) сделать замену переменных по формуле $\mathbf{w} \to D_i \mathbf{w}$ (для упрощения обозначений мы оставили старое обозначение переменной $\mathbf{w}$), $i = 1, \ldots, 2^n$.

7. Повторить пп. 3 и 4 алгоритма 2^n раз и найти матрицы K_i; $i = 2, 3, \ldots, 2^n$. (Ясно, что D_1 — единичная матрица и потому $K_1 = K$.)

8. Найти матрицы обратных связей в исходном базисе пространства $\mathbf{R}^n$ по формулам $K_i \cdot (LD_i)^{-1}$; $i = 1, \ldots, 2^n$.

З а м е ч а н и е. Если найти ребра $\mathbf{a}_{i1}, \ldots, \mathbf{a}_{in}$ конусов асимптотической устойчивости Θ_i по формулам

$$(\mathbf{a}_{i1}, \ldots, \mathbf{a}_{in}) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \cdot (LD_i)^{-1}, i = 1, 2, \ldots, 2^n,$$

то, используя следствие теоремы 4, можно показать, что конусы асимптотической устойчивости системы (1), замкнутой найденными обратными связями, полностью накроют все пространство $\mathbf{R}^n$.(Они все получаются из первого ортанта после применения преобразования $(LD_i)^{-1}$.)

Таким образом, закон управления является разрывной функцией вектора начальных данных $\mathbf{x}_0$. Если $\mathbf{x}_0 \in \Theta_i$, то $\mathbf{u}_i(t) = K_i(\Theta_i) C \mathbf{x}(t)$, $i \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$.

5. Примеры

1) Приведем пример построения области устойчивости для следующей однородной системы третьего порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(-2x_1 + x_2 + x_3)^2 \\ \dot{x}_2 = -(2x_1 - 3x_2 + x_3)^2 \\ \dot{x}_3 = -(x_1 + x_2 - 3x_3)^2 \end{cases}.$$

Введем новые переменные $x_1/x_3 = z_1$, $x_2/x_3 = z_2$ и построим систему (11):

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{z}_1(t) = ((-1+z_1)z_2^2 + (2z_1^2 - 2z_1 - 2)z_2 + z_1^3 - 10z_1^2 + 13z_1 - 1)x_3(t) \\ \dot{z}_2(t) = (z_2^3 + (-15+2z_1)z_2^2 + (z_1^2 + 6z_1 + 15)z_2 - 4z_1^2 - 4z_1 - 1)x_3(t) \\ \dot{x}_3 = -(z_1 + z_2 - 3)^2 x_3^2(t) \end{array} \right. . \quad (29)$$

Рассмотрим систему уравнений (12)

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1(z_1, z_2) = (-1+z_1)z_2^2 + (2z_1^2 - 2z_1 - 2)z_2 + z_1^3 - 10z_1^2 + 13z_1 - 1 = 0 \\ G_2(z_1, z_2) = z_2^3 + (-15+2z_1)z_2^2 + (z_1^2 + 6z_1 + 15)z_2 - 4z_1^2 - 4z_1 - 1 = 0. \end{array} \right.$$

(Здесь применена упрощенная индексация.)

Исключая с помощью результанта [4] из последней системы переменную z_2, получим для z_1 следующее уравнение: $1156z_1^7 - 11629z_1^6 + 45659z_1^5 - 91185z_1^4 + 99120z_1^3 - 56960z_1^2 + 14848z_1 - 1024 = 0$. Корни последнего уравнения таковы: $z_{11}^* = 3.6872$, $z_{12}^* = 1.7974$, $z_{13}^* = 1.3666$, $z_{14}^* = 1.3496$, $z_{15}^* = 1.1379$, $z_{16}^* = 0.6180$, $z_{17}^* = 0.1031$.

В свою очередь, неизвестная z_2 определяется из соотношения

$$z_2 = \frac{11z_1^4 - 163z_1^3 + 368z_1^2 - 238z_1 + 16}{-45z_1^3 + 83z_1^2 + 6z_1 - 48}.$$

По корням z_{1i}^* находим из последней формулы корни z_{2i}^* : $z_{21}^* = 1.7310$, $z_{22}^* = 1.7974$, $z_{23}^* = 1.0423$, $z_{24}^* = 1.3491$, $z_{25}^* = 9.9979$, $z_{26}^* = 1.1805$, $z_{27}^* = 0.1032$.

Введем в систему (29) новую переменную $\mathbf{y}$ по формуле

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} + \mathbf{z}_i^* = \mathbf{y} + \begin{pmatrix} z_{1i}^* \\ z_{2i}^* \end{pmatrix}$$

и для каждого $i = 1, \ldots, 7$ построим матрицы H_i из уравнений первого приближения (15). Тогда получим:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 5.13 & 27.12 \\ -4.35 & 33.1 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} -0.71 & 3.73 \\ 5.33 & -2.29 \end{pmatrix},$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} -4.03 & -0.23 \\ -3.65 & 2.75 \end{pmatrix}, H_4 = \begin{pmatrix} -2.12 & -0.11 \\ 0.58 & -2.82 \end{pmatrix},$$

$$H_5 = \begin{pmatrix} 118.13 & 1.05 \\ 266.03 & 66.05 \end{pmatrix}, H_6 = \begin{pmatrix} 3.73 & -3.37 \\ 2.38 & -9.22 \end{pmatrix}, H_7 = \begin{pmatrix} 10.81 & -2.39 \\ -4.16 & 12.61 \end{pmatrix}.$$

Среди этих матриц гурвицевой является только матрица H_4. Поэтому рассматриваемая система имеет нетривиальный конус асимптотической устойчивости $\mathcal{K}_4$ с направляющей линией, заданной в неявной форме уравнениями $G_1(z_1, z_2) = 0$ и $G_2(z_1, z_2) = 0$. Замкнутая ограниченная область $\mathcal{M}_4$, по которой определяется этот конус, представлена на рисунке.

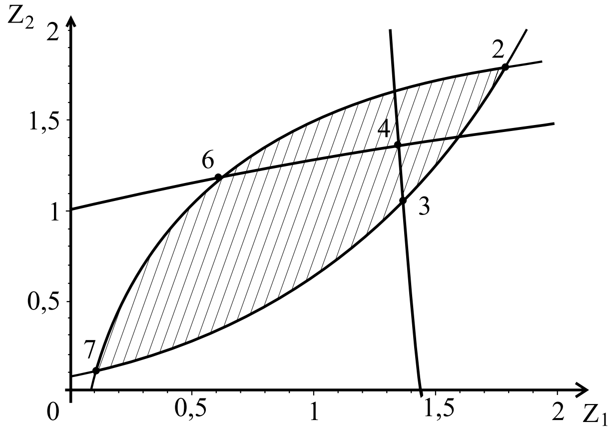

Рис. Область асимптотической устойчивости $\mathcal{M}_4$

На рисунке цифрами 2, 3, 4, 6 и 7 изображены точки $z_2^*, z_3^*, z_4^*, z_6^*$ и z_7^*. (Точки z_1^* и z_5^* не попали в график.)

Вектор начальных данных, обеспечивающий асимптотическую устойчивость тривиального решения, должен иметь вид $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{z}x_3, x_3)^T \in \mathbf{R}^3$, где $\mathbf{z} \in \mathcal{M}_4, x_3 \geq 0$.

2) Предположим, что билинейная система задана уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1u_1 + (-x_1 - x_2)u_2 \\ \dot{x}_2 = (2x_1 + x_2)u_1 + x_2u_2 \end{cases}.$$

Требуется построить закон управления по состоянию в форме $u_1 = k_{11}x_1 + k_{12}x_2, u_2 = k_{21}x_1 + k_{22}x_2$.

Система, замкнутая такой обратной связью, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (k_{11} - k_{21})x_1^2 + (k_{12} - k_{22} - k_{21})x_1x_2 - k_{22}x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 2k_{11}x_1^2 + (2k_{12} + k_{11} + k_{21})x_1x_2 + (k_{12} + k_{22})x_2^2 \end{cases}. \tag{30}$$

Для упрощения алгоритма 4.1 положим $L = I$ и $k_{12} - k_{22} - k_{21} = 0$ и $2k_{12} + k_{11} + k_{21} = 0$. (Таким способом мы можем опустить пп. 1–4 алгоритма.) Тогда из двух последних уравнений будем иметь

$$k_{12} = -\frac{1}{3}(k_{11} - 2k_{22}), k_{21} = -\frac{1}{3}(k_{11} + k_{22}).$$

С учетом этих соотношений система (30) приобретет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{1}{3}(4k_{11} + k_{22})x_1^2 - k_{22}x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 2k_{11}x_1^2 + \dfrac{1}{3}(-k_{11} + 5k_{22})x_2^2 \end{cases}. \tag{31}$$

Введем обозначание

$$D = \frac{1}{9}(4k_{11} + k_{22})(-k_{11} + 5k_{22}) + 2k_{11}k_{22}.$$

Тогда пп. 5–8 алгоритма 4.1 могут быть реализованы следующим образом.

Выпишем условия устойчивости для системы (31) (они следуют из теоремы 4 или из теоремы 6[2]) в 1–4 ортантах плоскости $x_1 0 x_2$:

1(++).

$$\frac{1}{3}(4k_{11} + k_{22}) < 0, -k_{22} \geq 0, 2k_{11} \geq 0, \frac{1}{3}(-k_{11} + 5k_{22}) < 0, D > 0;$$

2(+−).

$$\frac{1}{3}(4k_{11} + k_{22}) < 0, -k_{22} \geq 0, 2k_{11} \leq 0, \frac{1}{3}(-k_{11} + 5k_{22}) > 0, D < 0;$$

3(−−).

$$\frac{1}{3}(4k_{11} + k_{22}) > 0, -k_{22} \leq 0, 2k_{11} \leq 0, \frac{1}{3}(-k_{11} + 5k_{22}) > 0, D > 0;$$

4(−+).

$$\frac{1}{3}(4k_{11} + k_{22}) > 0, -k_{22} \leq 0, 2k_{11} \geq 0, \frac{1}{3}(-k_{11} + 5k_{22}) < 0, D < 0.$$

По решениям каждой из этих систем строим соответствующие матрицы обратных связей:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} -10 & 8/3 \\ 11/3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}, \quad K_4 = \begin{pmatrix} 10 & -8/3 \\ -11/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения замкнутой обратной связью $K_i, i = 1, \ldots, 4$, системы получаются из (30) в следующем виде:

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -x_1^2 + 2x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -5x_2^2 \end{array} \right. ; \quad 2) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -\dfrac{41}{3}x_1^2 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -20x_1^2 + \dfrac{5}{3}x_2^2 \end{array} \right. ;$$

$$3) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = 2x_1^2 - 10x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1^2 + 17x_2^2 \end{array} \right. ; \quad 4) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dfrac{41}{3}x_1^2 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 20x_1^2 - \dfrac{5}{3}x_2^2. \end{array} \right.$$

Таким образом, если вектор начальных данных $\mathbf{x}_0$ принадлежит ортанту с номером i, то закон управления должен выбираться в форме $\mathbf{u} = K_i(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}$, $i \in \{1, \ldots, 4\}$. В этом случае достигается асимптотическая устойчивость по Ляпунову (глобальная) на всем пространстве состояний.

В заключение рассмотрим вместо заданной системы управления систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{array} = A_0 + \begin{array}{l} x_1 u_1 + (-x_1 - x_2) u_2 \\ (2x_1 + x_2) u_1 + x_2 u_2 \end{array} \right. ,$$

где диагональная матрица $A_0 \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ не имеет собственных чисел с положительной вещественной частью. Тогда согласно теореме 4 эта система, замкнутая обратными связями $\mathbf{u} = K_i(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}, i \in \{1, \ldots, 4\}$, также будет устойчивой по Ляпунову на всем пространстве состояний.

6. Заключение

В настоящей работе предложен метод синтеза обратной связи для билинейных систем управления. Этот метод существенно опирается на теорию регулярных систем квадратичных дифференциальных уравнений [1, 2]. Однако в приложениях встречаются системы квадратичных дифференциальных уравнений, не являющихся регулярными [5–7]. Поэтому в дальнейшем желательно развивать теорию билинейных (или билинейно-квадратичных) систем, не опираясь на понятие регулярности.

Следуюший результат является таким тривиальным обобщением теоремы 4 (или теоремы 8 [2]).

Теорема 5. *Пусть для системы (4) выполнены условия:*

1) начальные данные $x_{i0} \geq 0$*;*

2) формы $(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)B_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)^T$ *положительно определены;*

3) найдутся положительные числа r_i *такие, что форма* $\mathbf{x}^T(\sum\limits_{i=1}^{n} r_i B_i)\mathbf{x}$ *неположительно определена;* $i = 1, \ldots, n$.
Тогда любое решение системы (4) условно устойчиво.

С помощью этой теоремы уже можно приступать к исследованию билинейно-квадратичных систем, в состав которых входят линейные дифференциальные уравнения, не содержащие управлений. Если такую систему замкнуть линейной обратной связью, то полученная система квадратичных дифференциальных уравнений не будет регулярной.

Автор приносит свою благодарность проф. В.Е. Белозерову за постановку задачи и помощь в работе.

Список литературы

[1] *V.Ye. Belozyorov*, On an invariant design of feedback for bilinear control systems of second order. — *Int. J. Appl. Math. Comp. Sci.* (2001), v. 11, No. 2, p. 377–389.

[2] *V.Ye. Belozyorov*, Design of linear feedback for bilinear control systems. — *Int. J. Appl. Math. Comp. Sci.* (2002), v. 12, No. 4, p. 493–511.

[3] *Б.П. Демидович*, Лекции по математической теории устойчивости. Наука, Москва (1967).

[4] *С. Ленг*, Алгебра. Мир, Москва (1968).

[5] *Г.Накен*, Синергетика. Мир, Москва (1980).

[6] *D.I. Elliott*, Bilinear systems. In book: Encyclopedia of Electrical Engineering (John Webster, Ed.). John Wiley and Sons, New York (1999).

[7] *В.Е. Белозеров, О.А. Поддубная*, Алгебраический анализ условной устойчивости решений квадратичных систем дифференциальных уравнений. — *Пробл. управления и информатики* (2000), № 2, с. 13–23.

On the stability of solutions of systems ordinary quadratic differential equations on cone

S.A. Volkova

The new sufficient conditions of a conditional stability of the trivial solution of a system of the ordinary quadratic differential equations are obtained. For the homogeneous system a domains of unlocal stability are also indicated (it will be cones). Then this domain is used for design of piecewise linear (discontinuous) control lawes on output for a bilinear control system of any order. Thus a system closed by such discontinuous feed-back becomes globally stable in the Lyapunuv sense for all the state space. The examples are given.