Математическая физика, анализ, геометрия
2005, т. 12, № 1, с. 86–102

Признаки полноты элементарных решений вырожденных операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка

А.Л. Пивень

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина

E-mail:Aleksey.L.Piven@univer.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 7 апреля 2004 г.
Представлена Ф.С. Рофе-Бекетовым

В банаховом пространстве рассматривается абстрактное дифференциальное уравнение высокого порядка $\sum\limits_{j=0}^{n} A_j u^{(j)}(t) = 0$. Оператор A_n при старшей производной может быть вырожденным. Получены условия аппроксимации решений линейными комбинациями элементарных решений. Абстрактные результаты применяются к дифференциальным уравнениям в частных производных.

У банаховому просторі розглядається абстрактне диференціальне рівняння високого порядку $\sum\limits_{j=0}^{n} A_j u^{(j)}(t) = 0$. Оператор A_n при старшій похідній може бути виродженим. Отримано умови апроксимації розв'язків лінійними комбінаціями елементарних розв'язків. Абстрактні результати застосовуються до диференціальних рівнянь з частинними похідними.

1. Введение

В данной работе устанавливаются условия, при которых решения задачи Коши

$$\sum_{j=0}^{n} A_j u^{(j)}(t) = 0, \qquad t > 0, \tag{1}$$

$$u^{(j)}(0) = u_j; \qquad j = 0, \ldots, n-1, \tag{2}$$

Mathematics Subject Classification 2000: 34G10.

и их производные до порядка $n-1$ равномерно аппроксимируются линейными комбинациями элементарных решений уравнения (1). Здесь A_j — линейные замкнутые операторы, действующие из комплексного банахова пространства X в комплексное банахово пространство Y, с областями определения $D(A_j)$, соответственно. Оператор A_n может иметь нетривиальное ядро, и потому уравнение (1) называется *вырожденным*. Как и в [1], под *решением задачи Коши (1), (2)* понимается вектор-функция $u(t) \in C^n((0,\infty), X) \bigcap C^{n-1}([0,\infty), X)$, которая удовлетворяет уравнению (1), начальным условиям (2), причем $A_j u(t) \in C^j((0,\infty), Y) \bigcap C^{j-1}([0, \infty), Y)$, $j = 1, \ldots, n$.

Через ϱ обозначим множество регулярных точек характеристического пучка $L(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda^j A_j : D = \bigcap\limits_{j=0}^{n} D(A_j) \to Y$ уравнения (1), т.е. множество тех точек λ, для которых существует резольвентный оператор $R(\lambda) = L^{-1}(\lambda) \in [Y, X]$. Здесь $[Y, X]$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из Y в X. По каждой цепочке $\varphi_0, \ldots, \varphi_m \in D$, которая состоит из собственного и присоединенных векторов (СПВ) пучка $L(\lambda)$, отвечающих собственному значению λ_0, строятся *элементарные решения*[⋆]

$$u_k(t) = e^{\lambda_0 t} \sum_{j=0}^{k} \frac{t^j}{j!} \varphi_{k-j}$$

уравнения (1) и векторы их начальных значений $h_k = \{u_k^{(j)}(0)\}_{j=0}^{n-1}$, $k = 0, \ldots, m$. Согласно приведенному в [2] определению векторы $\varphi_0, \ldots, \varphi_m \in D$ образуют цепочку СПВ пучка $L(\lambda)$, отвечающую собственному значению λ_0, если выполнены соотношения

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} L^{(j)}(\lambda_0) \varphi_{k-j} = 0, \quad k = 0, \ldots, m.$$

Как и в [1], множество элементарных решений дополняется тривиальным решением, а система векторов $\{h_k\}$ — нулевым вектором.

В настоящей работе наряду с условиями аппроксимации решений уравнения (1) с помощью элементарных решений также устанавливаются признаки n-кратной полноты системы СПВ в подпространстве X_0 решений задачи Коши (1), (2). Напомним, что *подпространство решений задачи Коши (1), (2)* представляет собой замыкание в $X^n = X \times \cdots \times X$ векторов $\{u_j\}_{j=0}^{n-1}$ (2), для которых задача имеет решение [1]. Согласно [1] система СПВ пучка $L(\lambda)$ называется *n-кратно полной в подпространстве решений* X_0, если линейная оболочка векторов h_k (для всевозможных собственных значений и соответствующих цепочек СПВ) плотна в X_0.

[⋆] См. [1–6]. В [3, 4] такие решения назывались *экспоненциальными*.

Подпространство решений X_0 может оказаться тривиальным, т.е. состоять из единственного нулевого вектора. Простейшим условием, которое исключает такую возможность, в случае $X = Y = \mathbf{C}^N$ является ограничение $\det L(\lambda) \not\equiv const$. Более общие условия нетривиальности подпространства решений X_0, выраженные в терминах поведения резольвенты $R(\lambda)$ характеристического пучка $L(\lambda)$, приведены в работах [7–9].

Вопросы полноты элементарных решений невырожденного уравнения первого порядка

$$u'(t) = Au(t) \tag{3}$$

изучались в [4]. Для вырожденного уравнения первого порядка

$$Au'(t) + Bu(t) = 0 \tag{4}$$

полнота элементарных решений рассматривалась в [5]. Для невырожденного уравнения (1) высокого порядка полнота элементарных решений изучалась в [6], а для вырожденного уравнения (1) — в [1].

Пусть резольвента $R(\lambda)$ пучка $L(\lambda)$ является мероморфной со значениями в $[Y, X]$ оператор-функцией во всей комплексной плоскости. Введем для нее следующие характеристики роста:

$$\tau_p = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{2\pi r^p} \int\limits_0^{2\pi} \ln^+ ||R(re^{i\varphi})|| d\varphi, \quad p \geq 1. \tag{5}$$

При $p = 1$ эта величина принимает значение

$$\tau_1 = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{2\pi r} \int\limits_0^{2\pi} \ln^+ ||R(re^{i\varphi})|| d\varphi. \tag{6}$$

Такая характеристика роста резольвенты называется *степенью резольвенты* $R(\lambda)$ и используется при исследовании вопросов полноты элементарных решений в работах [4, 5, 1].

Если резольвента $R(\lambda)$ является мероморфной оператор-функцией в полуплоскости $Re\lambda \leq 0$, то вместо (5), (6) рассматривается следующая характеристика роста:

$$\delta = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{\pi r} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \ln^+ ||R(re^{i\varphi})|| d\varphi, \tag{7}$$

называемая *степенью резольвенты* $R(\lambda)$ *в угле* $\frac{\pi}{2} \leq \arg\lambda \leq \frac{3\pi}{2}$ [4].

2. Признаки аппроксимации произвольного решения с помощью элементарных решений

Пусть резольвента $R(\lambda)$ является мероморфной оператор-функцией конечной степени τ_1 (6). Условия равномерной аппроксимации решений уравнения (3) линейными комбинациями элементарных решений на каждом сегменте $[c\delta, T]$, где постоянная $c \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{8}{3}\right]$, установлены в [4]. Для уравнения (4) в [5] равномерная аппроксимация решений получена также на сегментах $[c\delta, T]$, а для уравнения (1) — на сегментах $[\pi\tau_1, T]$ в работе [1]. В приведенной ниже теореме 1 равномерная аппроксимация решений линейными комбинациями элементарных решений получена на каждом сегменте $\left[\frac{\pi}{2}\delta, T\right]$. Очевидно, что $\tau_1 \geq \dfrac{\delta}{2}$. Для уравнения из примера 1 выполнено неравенство $\tau_1 > \dfrac{\delta}{2}$. Поэтому теорема 1 настоящей работы гарантирует аппроксимацию решений с помощью элементарных на более широком множестве, чем соответствующая теорема 2 из [1].

Теорема 1. *Пусть резольвента $R(\lambda)$ характеристического пучка $L(\lambda)$ уравнения* (1) *является мероморфной со значениями в* $[Y, X]$ *оператор-функцией конечной степени τ_1 (6). Тогда любое решение уравнения (1) аппроксимируется линейными комбинациями элементарных решений в норме пространства $C^{n-1}\left(\left[\frac{\pi}{2}\delta, T\right], X\right)$ $\left(T > \frac{\pi}{2}\delta\right)$. Если $\delta = 0$, то система СПВ пучка $L(\lambda)$ n-кратно полна в подпространстве решений X_0.*

Доказательство. Пусть решение $u(t)$ уравнения (1) обладает повышенной степенью гладкости ($u(t) \in C^{2n-2}([0,\infty), X), A_j u(t) \in C^{2n-2}([0,\infty), Y)$, $j = 1, \dots, n$), и линейный непрерывный функционал $g_0 \in \left(C^{n-1}\left([0, T_1], X\right)\right)^*$ $(T_1 > 0)$ аннулируется на всех элементарных решениях этого уравнения. Доказательство теоремы проводится по схеме, предложенной в [1] для теоремы 2. Формально оно получается заменой величины $\pi\tau_1$ величиной $\frac{\pi}{2}\delta$. Необходимо лишь обосновать, что при каждом $t \geq 0$ функция

$$g(\lambda, t) =< g_0, \quad \sum_{j=1}^{n} R(\lambda) A_j \sum_{k=0}^{j-1} \lambda^k u^{(j-1-k)}(t+\tau) > \tag{8}$$

является целой функцией степени $\sigma_g(t) = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{1}{r} \ln^+ \max\limits_{|\lambda|=r} |g(\lambda, t)| \leq \frac{\pi}{2}\delta$. Действительно, при всех $t \geq 0$ имеем

$$\int\limits_0^t y(s) e^{-\lambda s} ds = -e^{-\lambda t} g(\lambda, t) + g(\lambda, 0), \quad y(s) =< g_0, u(s+\tau) > . \tag{9}$$

Тогда в углах $-\frac{\pi}{2}+\eta \le \arg\lambda \le \frac{\pi}{2}-\eta$ $\left(0<\eta\le\frac{\pi}{2}\right)$ функция $g(\lambda,t)\to 0$, $|\lambda|\to\infty$. Поэтому $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\eta}^{\frac{\pi}{2}-\eta}\ln^{+}|g(re^{i\varphi},t)|d\varphi = 0, \quad t\ge 0,\ 0<\eta\le\frac{\pi}{2}$.

Отсюда с учетом неравенства $\sigma_g(t)\le\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{1}{2r}\int\limits_{0}^{2\pi}\ln^{+}|g(re^{i\varphi},t)|d\varphi$ ([10, Приложение]) имеем

$$\sigma_g(t)\le\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{1}{2r}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\ln^{+}|g(re^{i\varphi},t)|d\varphi\le\frac{\pi}{2}\delta,\quad t\ge 0.$$

Из этой оценки и принципа Фрагмена–Линделефа следует, что $g(\lambda,t)=0$ при всех $0<\eta<\frac{\pi}{2}$, $t>\frac{\pi}{2}\delta\sec\eta$. Как и в [1], получаем $y(t)\equiv 0$ $\left(t\ge\frac{\pi}{2}\delta\right)$. Отсюда вытекает утверждение теоремы.

Приведем пример, иллюстрирующий отличие доказанной теоремы от соответствующей теоремы из [1].

П р и м е р 1. В пространстве $X=Y=C[0,2]$ рассмотрим смешанную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad 0\le x\le 2,\ t>0; \tag{10}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u(0,t)+u(1,t)=0. \tag{11}$$

Для представления этой задачи в абстрактном виде (1),(2) введем в пространстве X оператор $A_0=-\frac{d}{dx}$, $D(A_0)=\left\{y\in C^1[0,2]: y(0)+y(1)=0\right\}$ и положим $A_1=I$. Спектр пучка $L(\lambda)=\lambda I+A_0$ состоит из собственных чисел $\lambda_k=\pi i(2k+1)$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Резольвента $R(\lambda)=(A_0+\lambda I)^{-1}$ имеет вид

$$R(\lambda)f(x)=\left(\int\limits_0^x e^{\lambda(x-s)}f(s)ds-\frac{e^{\lambda}}{e^{\lambda}+1}\int\limits_0^1 e^{\lambda(x-s)}f(s)ds\right),$$

$$\lambda\in\varrho,\ f(x)\in C[0,2];$$

и, оценивая ее норму, находим по формулам (6),(7), что $\tau_1=\frac{1}{\pi}$, $\delta=0$. Согласно теореме 1 на каждом сегменте $[0,T]$ решение задачи (10), (11) равномерно аппроксимируется линейными комбинациями элементарных решений. (Заметим, что соответствующая теорема из [1] гарантирует аппроксимацию только на отрезках $[1,T]$.)

В теореме 1 предполагалось, что $\tau_1 < \infty$. В теореме 2 мы отказываемся от этого предположения и требуем конечность характеристики τ_p при некотором $p > 1$. При этом аппроксимация произвольного решения линейными комбинациями элементарных решений устанавливается при следующем дополнительном ограничении на резольвенту $R(\lambda)$: существует конечный набор лучей

$$\ell(\theta_j) = \{\lambda(r) = z_0 + re^{i\theta_j},\ r \geq 0\}, \quad j = 1, \dots, N, \tag{12}$$

такой, что

$$\omega_j = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln^+ ||R(z_0 + re^{i\theta_j})||}{r} < \infty, \quad j = 1, \dots, N, \tag{13}$$

причем эти лучи разбивают всю комплексную плоскость на углы раствора $< \frac{\pi}{p}$. При $p > 1$ некоторые лучи системы (12) асимптотически лежат в полуплоскости $Re\lambda < Rez_0$, количество таких лучей обозначим через m. Не нарушая общности, будем считать, что этим свойством обладают лучи $\{\ell(\theta_j)\}_{j=1}^m$.

Можно привести примеры, когда перечисленные ограничения выполнены, но $\tau_1 = \infty$.

П р и м е р 2. В пространстве $X = Y = L_2[0,1]$ рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} + i\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0,\ x \in [0,1]; \tag{14}$$

$$\frac{\partial^j u(x,0))}{\partial t^j} = u_j(x),\ j = 0,1,2,3; \quad u(0,t) = u(1,t) = 0. \tag{15}$$

Для представления этой задачи в абстрактном виде (1), (2) введем в пространстве $L_2[0,1]$ следующие дифференциальные операторы: $A_2 u(x) = iu'(x)$, $D(A_2) = W_2^1[0,1]$; $A_0 u(x) = -u''(x)$, $D(A_0) = \{u(x) \in W_2^2[0,1] : u(0) = u(1) = 0\}$. Здесь через $W_2^p[0,1]$ обозначено пространство Соболева [11]. Положим $A_4 = I$, $A_1 = A_3 = 0$. Спектр пучка $L(\lambda) = \lambda^4 I + \lambda^2 A_2 + A_0$ состоит из собственных чисел

$$\lambda_k^{\pm} = \sqrt{\frac{\pi k}{\sqrt{3}}}(\pm 1 \pm i),\ k = 1, 2, \dots; \quad \lambda_l^{\pm} = \sqrt{\frac{\pi l}{\sqrt{3}}}(\pm 1 \mp i),\ l = 1, 2, \dots .$$

Резольвента $R(\lambda) = L^{-1}(\lambda)$ для всех регулярных точек λ имеет вид

$$R(\lambda) f(x) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi, \quad f \in L_2[0,1],$$

где

$$G(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{2e^{(i\lambda^2x-i\lambda^2\xi)/2}}{\sqrt{3}\lambda^2\operatorname{sh}(\sqrt{3}\lambda^2/2)}\operatorname{sh}\left(\dfrac{\lambda^2\sqrt{3}-\lambda^2\xi\sqrt{3}}{2}\right)\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda^2x, & x\le\xi,\\[2ex] \dfrac{2e^{(i\lambda^2x-i\lambda^2\xi)/2}}{\sqrt{3}\lambda^2\operatorname{sh}(\sqrt{3}\lambda^2/2)}\operatorname{sh}\left(\dfrac{\lambda^2\sqrt{3}-\lambda^2x\sqrt{3}}{2}\right)\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda^2\xi, & x>\xi.\end{cases}$$

С помощью этого представления проверяем, что резольвента является мероморфной оператор-функцией порядка 2 и конечного типа. Поэтому $\tau_1=\infty$, $\tau_2<\infty$. Лучи $\{\lambda(r)=r\exp(i\varphi):\ r\ge 0\}$, $\left(\varphi=\frac{\pi k}{2}\pm\frac{\pi}{12},\ k=0,1,2,3\right)$ разбивают комплексную плоскость на углы раствора $\le\frac{\pi}{3}$. На этих лучах резольвента $R(\lambda)$ равномерно ограничена (см. ниже п. 5) и соответствующие величины ω_j из (13) равны нулю. Как следует из формулировки теоремы 2, аппроксимация решения задачи (14), (15) линейными комбинациями элементарных решений осуществляется в норме пространства $C^3\left([0,T],L_2[0,1]\right)$ $(T>0)$.

Теорема 2. *Пусть резольвента $R(\lambda)$ характеристического пучка $L(\lambda)$, отвечающего уравнению (1), является мероморфной оператор-функцией со значениями в $[Y,X]$ и при некотором $p>1$ конечна ее характеристика роста τ_p (5). Предположим, что существует конечный набор лучей $\ell(\theta_j)$ (12), на которых резольвента удовлетворяет условию (13). Пусть эти лучи разбивают всю комплексную плоскость на углы раствора $<\frac{\pi}{p}$. Тогда всякое решение уравнения (1) аппроксимируется линейными комбинациями элементарных решений в норме пространства $C^{n-1}([-\omega_j\sec\theta_j,T],X)$ $(T>-\omega_j\sec\theta_j,\ j=1,\dots,m)$. Если $\omega_j=0$ при некотором $j\in\{1,\dots,m\}$, то система СПВ пучка $L(\lambda)$ n-кратно полна в подпространстве решений X_0.*

Доказательство. При доказательстве этой теоремы также воспользуемся схемой доказательства, предложенной в [1] для теоремы 2. Из условия $\tau_p<\infty$ следует, что при каждом $t\ge 0$ функция $g(\lambda,t)$, определенная соотношением (9), является целой порядка не выше p и типа $\sigma_g(t)\le p\pi\tau_p$ при порядке p ([10, Приложение]). Используя (13), получаем оценку роста функции $g(\lambda,t)$ на лучах $\ell(\theta_j)$: $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\ln^+|g(z_0+re^{i\theta_j},t)|}{r}\le\omega_j$, $j=1,\dots,N$, $t\ge 0$. В углах раствора $<\frac{\pi}{p}$, на которые разбивают лучи $\ell(\theta_j)$ комплексную плоскость, применим к функции $g(\lambda,t)$ принцип Фрагмена–Линделефа. Получим, что степени целых функций $g(\lambda,t)$ $(t\ge 0)$ ограничены некоторой положительной постоянной h. Отсюда с учетом соотношения (9) следует, что при всех $t\ge 0$ функция $g(\lambda,t)$ стремится к нулю при $\lambda\to\infty$ вдоль каждого из лучей $\ell(\varphi)=\{\lambda=z_0+re^{i\varphi}:r\ge 0\}$, $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$. При фиксированном $j\in\{1,\dots,m\}$ выберем числа $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ и $\eta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ так, чтобы выполнялись неравенства $\theta_j - \xi < \pi$, $\eta - \theta_j < \pi$. В углах, на которые разбивают всю комплексную плоскость лучи $\ell(\theta_j), \ell(\xi), \ell(\eta)$, применим к функции $g(\lambda, t)(t > -\omega_j \sec \theta_j)$ принцип Фрагмена–Линделефа. Получим, что при каждом $t > -\omega_j \sec \theta_j$ функция $g(\lambda, t)$ ограничена в этих углах, а следовательно, и во всей комплексной плоскости. Как и в [1], с помощью соотношения (9) получаем $y(t) = 0,\ t \geq -\omega_j \sec \theta_j$, что и доказывает теорему.

З а м е ч а н и е. Из теоремы 6.2 работы [4] следует, что при $p > 1$ конечность величины τ_p, вообще говоря, не обеспечивает равномерную аппроксимацию решения $u(t)$ уравнения (1) линейными комбинациями элементарных решений ни при одном t.

3. Признаки аппроксимации нормальных решений с помощью элементарных решений

Решение $u(t)$ уравнения (1) назовем *нормальным решением*, если функции $u(t)$, $A_j u(t)$, $j = 1, \dots, n$, имеют конечный экспоненциальный тип. Наибольший из экспоненциальных типов перечисленных функций обозначим через h_u и назовем *показателем экспоненциального роста нормального решения* $u(t)$. Множество всех решений с показателем экспоненциального роста $h_u < \alpha$ обозначим через U_α. Через Λ_α обозначим замыкание в X^n множества всех векторов $\{u_j\}_{j=0}^{n-1}$, для которых задача (1),(2) имеет решение $u(t) \in U_\alpha$. Мы будем исследовать аппроксимацию нормальных решений класса U_α линейными комбинациями элементарных решений, также принадлежащих классу U_α. Понятие n-кратной полноты в пространстве Λ_α системы СПВ пучка $L(\lambda)$, отвечающей собственным значениям из полуплоскости $Re\lambda < \alpha$, вводится аналогично понятию n-кратной полноты системы СПВ в подпространстве X_0. Рассмотрение решений класса U_α позволяет применять метод классического преобразования Лапласа для доказательства теорем полноты [6]. При этом достаточно наложить ограничения на резольвенту $R(\lambda) = L^{-1}(\lambda)$ только в полуплоскости $Re\lambda \leq \alpha$. Мы даже не предполагаем мероморфности резольвенты $R(\lambda)$ в полуплоскости $Re\lambda > \alpha$.

Теорема 3. *Пусть резольвента $R(\lambda)$ характеристического пучка $L(\lambda)$ является мероморфной в полуплоскости $Re\lambda \leq \alpha$ оператор-функцией с конечной характеристикой роста*

$$\delta_1 = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{\pi r} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \ln^+ ||R(\alpha + re^{i\varphi})|| d\varphi.$$

Тогда всякое решение $u(t) \in U_\alpha$ аппроксимируется линейными комбинациями элементарных решений из U_α в норме пространства $C^{n-1}([\frac{\pi}{2}\delta_1, T], X)$

$\left(T > \frac{\pi}{2}\delta_1\right)$. *Если* $\delta_1 = 0$, *то система СПВ пучка* $L(\lambda)$, *отвечающая собственным значениям из полуплоскости* $Re\lambda < \alpha$, *n-кратно полна в подпространстве* Λ_α.

Доказательство. Теорему достаточно доказать для решений $u(t) \in U_\alpha$ *повышенной гладкости* ($u^{(n-1)}(t) \in U_\alpha$, $u(t) \in C^{2n-2}([0,\infty), X)$, $A_j u(t) \in C^{2n-2}([0,\infty), Y)$, $j = 1, \ldots, n$), поскольку такие решения аппроксимируют произвольное решение класса U_α в норме пространства $C^{n-1}([0,T], X)$. Пусть $g_0 \in \left(C^{n-1}([0,T_1], X)\right)^*$, $(T_1 > 0)$ — линейный непрерывный функционал, который аннулируется на всех элементарных решениях класса U_α. Как и при доказательстве теорем 1, 2, получаем соотношение (9). Теперь функция $g(\lambda, t)$ при любом $t \geq 0$ голоморфна в полуплоскости $Re\lambda < \alpha$. Так как $v(t) = u^{(n-1)}(t) \in U_\alpha$, то скалярная функция $y(t)$ обладает в полуплоскости $Re\lambda > h_v$ преобразованием Лапласа. Переходя в (9) к пределу при $t \to \infty$, получаем соотношение

$$\int_0^\infty y(s)e^{-\lambda s}ds = g(\lambda, 0), \quad \alpha > Re\lambda > h_v,\ \lambda \in \varrho.$$

Отсюда с учетом (9)

$$e^{\lambda t}\int_t^\infty y(s)e^{-\lambda s}ds = g(\lambda, t), \qquad t \geq 0,\ \alpha > Re\lambda > h_v,\ \lambda \in \varrho. \tag{16}$$

Так как при каждом $t \geq 0$ функция $e^{\lambda t}\int\limits_t^\infty y(s)e^{-\lambda s}ds$ является аналитической в полуплоскости $Re\lambda > h_v$, то с помощью равенства (16) функция $g(\lambda, t)$ допускает аналитическое продолжение в эту полуплоскость. Таким образом, функция $g(\lambda, t)$ $(t \geq 0)$ является целой, удовлетворяющей соотношению (16) при $Re\lambda \geq \alpha$. Из этого соотношения получаем, что $g(\lambda, t)$ — ограниченная функция в полуплоскости $Re\lambda \geq \alpha$. Тогда

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln^+|g(\alpha + re^{i\varphi}, t)|d\varphi = 0, \quad t \geq 0. \tag{17}$$

Отсюда с помощью теоремы 1 из ([10, Приложение]) получаем, что при любом $t \geq 0$ функция $g(\lambda, t)$ является целой функцией степени $\sigma_g(t) \leq \frac{\pi}{2}\delta_1$. С учетом соотношения (9) заключаем, что при всех $\eta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $t > \frac{\pi}{2}\delta_1 \sec\eta$ в угле $\{\lambda = \alpha + re^{i\varphi} : r \geq 0, |\varphi - \pi| \leq \eta\}$ функция $g(\lambda, t) = e^{\lambda t}g(\lambda, 0) - e^{\lambda t}\int\limits_0^t y(s)e^{-\lambda s}ds$

стремится к нулю при $\lambda \to \infty$ равномерно относительно $\arg(\lambda - \alpha)$. Так как порядок функции $g(\lambda, t)$ $\big(t > \frac{\pi}{2}\delta_1 \sec \eta\big)$ не превосходит 1, то согласно принципу Фрагмена–Линделефа функция $g(\lambda, t)$ $\big(t > \frac{\pi}{2}\delta_1 \sec \eta\big)$ ограничена в углах $\{\lambda = \alpha + re^{i\varphi} : r \geq 0, \eta \leq \pm\varphi \leq \pi - \eta\}$. Поэтому при каждом $t > \frac{\pi}{2}\delta_1 \sec \eta$ функция $g(\lambda, t)$ ограничена во всей комплексной плоскости. Следовательно, $g(\lambda, t) = 0$ при всех $t > \frac{\pi}{2}\delta_1 \sec \eta$. Отсюда с учетом (9) имеем $y(t) = 0$, $t \geq \frac{\pi}{2}\delta_1$. Учитывая выбор функционала g_0, заключаем, что решение $u(t) \in U_\alpha$ аппроксимируется в норме пространства $C^{n-1}([\frac{\pi}{2}\delta_1, T], X)$ линейными комбинациями элементарных решений. При $\delta_1 = 0$ аппроксимация осуществляется в норме $C^{n-1}([0, T], X)$, и поэтому система СПВ пучка $L(\lambda)$, отвечающих собственным значениям из полуплоскости $Re\lambda < \alpha$, является n-кратно полной в подпространстве Λ_α. Теорема доказана.

По аналогии с п. 2 мы откажемся от условия $\delta_1 < \infty$ и потребуем конечность величины

$$\delta_p = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{\pi r^p} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \ln^+ ||R(\alpha + re^{i\varphi})|| d\varphi \tag{18}$$

при некотором $p > 1$. При этом аппроксимация решений $u(t) \in U_\alpha$ линейными комбинациями элементарных решений получается, если выполнено ограничение (13) на некоторой системе лучей $\ell(\theta_j)$ (12), разбивающих полуплоскость $Re\lambda \leq \alpha$ на углы раствора $< \frac{\pi}{p}$. Именно, справедлива

Теорема 4. *Пусть в полуплоскости $Re\lambda \leq \alpha$ резольвента $R(\lambda)$ характеристического пучка $L(\lambda)$ уравнения (1) является мероморфной оператор-функцией и для некоторого $p > 1$ конечна величина δ_p (18). Предположим, что для некоторого числа z_0 с $Re z_0 = \alpha$ существует конечный набор лучей $\ell(\theta_j)$ $\big(\frac{\pi}{2} < \theta_j < \frac{3\pi}{2}, j = 1, \ldots, N\big)$ (12), на которых резольвента удовлетворяет условию (13). Пусть лучи $\ell(\theta_j)$ разбивают полуплоскость $Re\lambda \leq \alpha$ на углы раствора $< \frac{\pi}{p}$. Тогда всякое решение $u(t) \in U_\alpha$ аппроксимируется линейными комбинациями элементарных решений из U_α в норме пространства $C^{n-1}([-\omega_j \sec \theta_j, T], X)$ $(T > -\omega_j \sec \theta_j,\ j = 1, \ldots, N)$. Если $\omega_j = 0$ при некотором $j \in \{1, \ldots, N\}$, то система СПВ пучка $L(\lambda)$, отвечающая собственным значениям λ из полуплоскости $Re\lambda < \alpha$, является n-кратно полной в подпространстве Λ_α.*

Доказательство теоремы проводится аналогично теореме 3, поэтому укажем, какие изменения необходимо провести в проведенных там рассуждениях. Как и при доказательстве теоремы 3, получаем соотношения (9),(16),(17). При каждом $t \geq 0$ функция $g(\lambda, t)$ является целой, удовлетворяющей в полуплоскости $Re\lambda \geq \alpha$ соотношению (16). Поэтому при любом $t \geq 0$

функция $g(\lambda,t)$ является ограниченной в этой полуплоскости. Из условия $p>1$ и соотношения (17) следует равенство

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{1}{2\pi r^p}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln^+|g(\alpha+re^{i\varphi},t)|d\varphi=0,\quad t\geq 0.$$

С помощью теоремы 1 из ([10, Приложение]) получаем, что при любом $t\geq 0$ функция $g(\lambda,t)$ является целой функцией порядка не выше p и типа $\sigma_g(t)\leq\frac{1}{2}p\pi\delta_p$ при порядке p. С учетом ограничения (13) на лучах $\ell(\theta_j)$ и принципа Фрагмена–Линделефа получаем, что степени целых функций $g(\lambda,t)$, $t\geq 0$, ограничены некоторой положительной постоянной h. Зафиксируем $j\in\{1,\ldots,N\}$. Из соотношения (9) следует, что при каждом $t>-\omega_j\sec\theta_j$ справедливо $g(\lambda,t)\to 0$, $|\lambda|\to\infty$, $\lambda\in\ell(\theta_j)$. Применим в углах $\left\{\lambda=z_0+re^{i\varphi}:\ r\geq 0,\ \frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\theta_j\right\}$, $\left\{\lambda=z_0+re^{i\varphi}:\ r\geq 0,\ \theta_j\leq\varphi\leq\frac{3\pi}{2}\right\}$ принцип Фрагмена–Линделефа к функции $g(\lambda,t)$, $t>-\omega_j\sec\theta_j$. Получим, что при каждом $t>-\omega_j\sec\theta_j$ функция $g(\lambda,t)$ ограничена в полуплоскости $Re\lambda\leq\alpha$. Поэтому $g(\lambda,t)=0$, $t>-\omega_j\sec\theta_j$ и, следовательно, $y(t)=0$, $t\geq-\omega_j\sec\theta_j$. Таким образом, имеет место аппроксимация решений $u(t)\in U_\alpha$ в норме пространства $C^{n-1}([-\omega_j\sec\theta_j,T],X)$ линейными комбинациями элементарных решений из U_α. Если $\omega_j=0$, то система СПВ пучка $L(\lambda)$, отвечающая собственным числам из полуплоскости $Re\lambda<\alpha$, n-кратно полна в подпространстве Λ_α.

Признаки аппроксимации нормальных решений уравнения (1) при дополнительном требовании квазиэллиптичности пучка $L(\lambda)$ получены в [6]. Это требование обеспечивает обратимость оператора A_n. Кроме того, в [6] предполагалось, что резольвента $R(\lambda)$ является мероморфной оператор-функцией конечного порядка $<p$. При таком ограничении $\tau_p<\infty$ и тем более $\delta_p<\infty$. Однако существуют примеры операторов, резольвента которых является мероморфной оператор-функцией бесконечного порядка, но с конечными характеристиками τ_p и δ_p. В качестве такого примера рассмотрим в пространстве l_2 максимальный оператор A, определенный формулой $Ax=\{a_jx_j\}_{j=1}^{\infty}$, $x=\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$, $a_j=\ln(j+1)$. Оператор A — самосопряженный и положительно определенный, его спектр представляет собой последовательность $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$, а резольвента является мероморфной оператор-функцией нулевой степени. Поскольку при любом p ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j^{-p}=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\ln^{-p}(j+1)$ расходится, то порядок резольвенты бесконечен ([10, с. 68]).

На самом деле теоремы 1–4 настоящей статьи являются также новыми и для невырожденного уравнения высокого порядка.

4. Полнота системы собственных и присоединенных векторов краевых задач

В пространстве $X = L_2([0,b], \mathbf{C}^N)$ рассмотрим следующую краевую задачу [12]:

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = \lambda W(x)y, \quad 0 \le x \le b, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} B_0 y(0) + B_1 y'(0) + B_2 y(b) + B_3 y'(b) = 0, \\ C_0 y(0) + C_1 y'(0) + C_2 y(b) + C_3 y'(b) = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

где непрерывные на $[0,b]$ оператор-функции $W(x)$, $P_k(x)$ $(k = 0,1,2)$, $P_0^{-1}(x)$ и постоянные операторы B_j, C_j, $j = 0,1,2,3$, действуют в пространстве $\mathbf{C}^N$, а λ — спектральный параметр. Предполагается, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (19),(20) (см. [12]) удовлетворяет условию

$$\Delta(\lambda) \not\equiv 0. \tag{21}$$

Введем в пространстве X оператор A_1 умножения на матрицу $W(x)$ $(D(A_1) = X)$ и дифференциальный оператор $A_0 y = P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y$, область определения $D(A_0)$ которого состоит из функций $y(x) \in W_2^2([0,b], \mathbf{C}^N)$, удовлетворяющих условиям (20). Тогда краевая задача (19),(20) эквивалентна задаче на собственные значения для пучка $L(\lambda) = \lambda A_1 - A_0$, причем оператор A_1 может быть вырожденным. В силу условия (21) спектр пучка $L(\lambda)$ дискретен, и резольвента $R(\lambda) = (\lambda A_1 - A_0)^{-1}$ является мероморфной оператор-функцией со значениями в $[X, X]$ ([12, с. 27, 111]). Как и в ([1, п. 3]) проверяется, что для резольвенты $R(\lambda)$ величина τ_1 (6) равна нулю. В силу теоремы 1 система СПВ пучка $L(\lambda)$ полна в подпространстве решений задачи $A_1 u'(t) - A_0 u(t) = 0$, $u(0) = u_0$.

Заметим, что условие (21) всегда выполнено для краевой задачи [13, 14] с самосопряженными коэффициентами

$$Ky \equiv -(P(x)y')' + Q(x)y = \lambda W(x)y, \quad 0 \le x \le b, \tag{22}$$

$$\cos A\; y^{\vee} - \sin A\; y^{\wedge} = 0, \tag{23}$$

где A — оператор в $\mathbf{C}^{2N}$, $y^{\vee} = (P(0)y'(0), -P(b)y'(b))^{tr}$, $y^{\wedge} = (y(0), y(b))^{tr}$, $P(x), P'(x), P^{-1}(x), Q(x), W(x)$ — операторы в $\mathbf{C}^N$, непрерывно зависящие от $x \in [0,b]$, если, кроме того, либо $W(x) > 0$ при всех $x \in [0,b]$, либо $0 \le A \le \frac{\pi}{2} I$, $P(x) > 0$, $Q(x) > 0$ $(x \in [0,b])$. Действительно, в этих случаях для любой нетривиальной вектор-функции $y(x) \in W_2^2([0,b], \mathbf{C}^N)$, подчиненной краевым условиям, оба интеграла $\int\limits_0^b (Ky, y)dx$, $\int\limits_0^b (W(x)y, y)dx$ вещественны и не могут одновременно обратиться в нуль. Поэтому задача (22),(23) не может иметь невещественных собственных чисел, т.е $\Delta(\lambda) \ne 0$ при $Im\lambda \ne 0$, а потому и $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$.

5. Приложения абстрактных результатов к уравнениям в частных производных

Пусть Ω — ограниченная область пространства $R^{\mathbf{N}}$ с достаточно гладкой границей Γ. Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\sum_{|\alpha|\le m_n}(-1)^{|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_N^{\alpha_N}}\left(a_{n,\alpha}(x)\frac{\partial^{|\alpha|+n}u(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_N^{\alpha_N}\partial t^n}\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{q}\sum_{|\alpha|\le m_j}a_{j,\alpha}(x)\frac{\partial^{|\alpha|+j}u(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_N^{\alpha_N}\partial t^j}$$

$$+\sum_{|\alpha|\le m_0}(-1)^{|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_N^{\alpha_N}}\left(a_{0,\alpha}(x)\frac{\partial^{|\alpha|}u(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_N^{\alpha_N}}\right)=0,\quad t>0,\ x\in\Omega; \tag{24}$$

$$u(x,t)|_{x\in\Gamma}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial\nu}|_{x\in\Gamma}=\ldots=\frac{\partial^{m_0-1}u(x,t)}{\partial\nu^{m_0-1}}|_{x\in\Gamma}=0,\quad t>0; \tag{25}$$

$$\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial t^j}|_{t=0}=u_j(x),\quad x\in\Omega,\quad j=0,\ldots,n-1. \tag{26}$$

Здесь $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)$ — мультииндекс, $\left(|\alpha|=\sum\limits_{j=1}^{N}\alpha_j\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ — производная по внешней нормали к Γ, коэффициенты $a_{j,\alpha}(x)\in C^\infty(\overline{\Omega})$, $j=0,\ldots,q,n$, $|\alpha|\le m_j$ и q — натуральное число. Предполагается, что $2q\le n$, $m_0-m_n>\dfrac{2N}{3}$, $m_0\ge m_j$, $2m_0-m_j>\dfrac{4Nj}{3n}$, $j=1,\ldots,q$. Считая $a_{j,\alpha}(x)\equiv 0$, $m_j<|\alpha|\le m_0$, $j=1,\ldots,q$, будем также предполагать, что выполнены следующие ограничения: $a_{n,\alpha}(x)\ge 0$ $(x\in\Omega,\ |\alpha|\le m_n)$, $a_{n,0}(x)\ge\sum\limits_{j=1}^{q}\sum\limits_{|\alpha|\le m_j}|a_{j,\alpha}(x)|$ $(x\in\Omega)$, $Re\,a_{0,\alpha}(x)-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{q}|a_{j,\alpha}(x)|\ge 0$ $(x\in\Omega,|\alpha|\le m_0)$, существует постоянная $c>0$ такая, что справедливы оценки $Re\,a_{0,\alpha}(x)-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{q}|a_{j,\alpha}(x)|\ge c$ при всех $x\in\Omega,|\alpha|=m_0$. Обозначим через $W_2^l=W_2^l(\Omega)$ пространство Соболева [11]. С помощью дифференциальных выражений

$$l_0[u]=\sum_{|\alpha|\le m_0}(-1)^{|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_N^{\alpha_N}}\left(a_{0,\alpha}(x)\frac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_N^{\alpha_N}}\right),$$

$$l_n[u] = \sum_{|\alpha|\le m_n} (-1)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_N^{\alpha_N}} \left(a_{n,\alpha}(x) \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_N^{\alpha_N}} \right),$$

$$l_j[u] = \sum_{|\alpha|\le m_j} a_{j,\alpha}(x) \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_N^{\alpha_N}}, \quad j = 1,\dots,q$$

в пространстве $X = Y = L_2(\Omega) = L_2$ введем операторы $A_j u(x) = l_j[u]$ с областями определения

$$D(A_0) = \left\{ u(x) \in W_2^{2m_0}(\Omega) : u(x)|_{x\in\Gamma} = \frac{\partial u(x)}{\partial\nu}|_{x\in\Gamma} = \dots = \frac{\partial^{m_0-1}u(x)}{\partial\nu^{m_0-1}}|_{x\in\Gamma} = 0 \right\},$$

$$D(A_j) = \{u(x) \in L_2,\ l_j[u] \in L_2\}, \quad j = 1,\dots,q,n,$$

соответственно. Положим $A_j = 0$ при $q < j < n$. Тогда в пространстве L_2 задача (24)–(26) записывается в виде (1), (2), где оператор A_n может быть вырожденным. Интегрируя по частям и используя ограничения на коэффициенты оператора A_0, получим при некотором $c_0 > 0$ оценку $Re(A_0 u, u) \ge c_0||u||^2$, $u \in D(A_0)$. Поэтому существует $A_0^{-1} \in [L_2, W_2^{2m_0}]$ (см., напр., ([11, с. 167])). Понятно, что $A_j A_0^{-1} \in [L_2, W_2^{2m_0-m_j}]$, $j = 1,\dots,q$, и $A_n A_0^{-1} \in [L_2, W_2^{2m_0-2m_n}]$. Из результатов [15] следует, что $A_j A_0^{-1} \in \sigma_{q_j}$, $q_j > \dfrac{N}{2m_0 - m_j}$, $j = 1,\dots,q$, и $A_n A_0^{-1} \in \sigma_{q_n}$, $\mathrm{q}_n > \dfrac{N}{2m_0 - 2m_n}$*. Тогда из теоремы 2 [17] вытекает, что резольвента $R(\lambda) = L^{-1}(\lambda)$ представима в виде отношения $\dfrac{F(\lambda)}{f(\lambda)}$, где $F(\lambda)$, $f(\lambda)$ — целые функции минимального типа при порядке $p = \max\{nq_n, \max\limits_{j=1,\dots,q}\{jq_j\}\}$ (знаменатель этого отношения — скалярная функция). Из ограничений на порядки дифференциальных операторов следует, что $p < \frac{3n}{4}$. Имеем

$$\frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} \ln^+ ||R(re^{i\varphi})|| d\varphi$$

$$\le \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} \ln^+ ||F(re^{i\varphi})|| d\varphi + \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f^{-1}(re^{i\varphi})| d\varphi.$$

Так как оператор-функция $F(\lambda)$ и скалярная функция имеют минимальный тип при порядке p, то каждый из интегралов в правой части этого неравенства стремится к нулю при $r \to \infty$ ([10, с. 67]). Поэтому при $p < \frac{3n}{4}$ конечна характеристика τ_p (5) роста резольвенты $R(\lambda)$.

* Определение классов σ_p вполне непрерывных операторов см. в [16].

При всех $\lambda = re^{i\varphi}$, $j = 1, \ldots, q$ и $u \in D(A_0)$ имеем

$$|\lambda^j (A_j u, u)| \leq r^j \sum_{|\alpha| \leq m_j} \int\limits_{\Omega} \left| a_{j,\alpha}(x) \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}} \overline{u(x)} \right| dx$$

$$\leq r^j \sum_{|\alpha| \leq m_j} \left|\left| \sqrt{|\alpha_{j,\alpha}(x)|} \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}} \right|\right| \cdot || \sqrt{|\alpha_{j,\alpha}(x)|} u(x) ||$$

$$\leq \sum_{|\alpha| \leq m_j} \left[\frac{1}{2} \left(|a_{j,\alpha}(x)| \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}, \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}} \right) + \frac{r^{2j}}{2} (|a_{j,\alpha}(x)| u(x), u(x)) \right]. \tag{27}$$

Рассмотрим лучи $l_k^{\pm} = \{\lambda = r \exp(i\varphi),\ \varphi = \frac{2\pi k}{n} \pm \frac{\pi}{3n},\ r \geq 0\}$, $k = 0, \ldots, n-1$. С помощью неравенства (27) и наложенных ограничений на коэффициенты операторов A_j получается неравенство

$$Re(L(\lambda)u, u) \geq c \sum_{|\alpha| = m_0} \left|\left| \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}} \right|\right|^2,$$

$$u \in D(A_0),\ \lambda \in l_k^{\pm},\ |\lambda| \geq 1,\ k = 0, \ldots, n-1.$$

Таким образом, резольвента $R(\lambda)$ ограничена при $\lambda \to \infty$ на лучах $l_k^{\pm}$, которые разбивают всю комплексную плоскость на углы раствора $\leq \dfrac{4\pi}{3n} < \dfrac{\pi}{p}$. Следовательно, и условие (13) теоремы 2 выполнено с постоянными $\omega_j = 0$. Тогда по теореме 2 на каждом сегменте $[0, T]$ всякое решение задачи (24)–(26) аппроксимируется линейными комбинациями элементарных решений в норме пространства $C^{n-1}([0, T], X)$. Система собственных и присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$ n-кратно полна в подпространстве решений этой задачи.

Задача (14), (15) из примера 2 является частным случаем задачи (24)–(26), поэтому для этой задачи аппроксимация ее решения линейными комбинациями элементарных решений осуществляется в норме пространства $C^3([0, T], L_2[0, 1])$ $(T > 0)$.

Список литературы

[1] *Л.А. Власенко, А.Г. Руткас,* Теоремы единственности и аппроксимации для одного вырожденного операторно-дифференциального уравнения. — *Мат. заметки* (1996), т. 60, № 4, с. 597–600.

[2] *М.В. Келдыш,* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов. — *Успехи мат. наук* (1971), т. 26, вып. 4, с. 15–41.

[3] *S. Agmon and L. Nirenberg*, Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space. — *Comm. Pure Appl. Math.* (1963), v. 16, No. 2, p. 121–239.

[4] *Ю.И. Любич, В.А. Ткаченко*, Теория и некоторые применения локального преобразования Лапласа. — *Мат. сб.* (1966), т. 70, № 3, с. 416–437.

[5] *Л.А. Власенко*, О полноте нормальных решений уравнения $Au'(t)+Bu(t) = f(t)$. — *Теория функций, функц. анализ и их прил.* (1987), вып. 48, с. 112–121.

[6] *А.А. Шкаликов*, Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними. — *Тр. семин. им. И.Г. Петровского* (1989), вып. 14, с. 140–224.

[7] *Ю.И. Любич*, Классическое и локальное преобразование Лапласа в абстрактной задаче Коши. — *Успехи мат. наук* (1966), т. 21, вып. 3, с. 3–51.

[8] *Л.А. Власенко*, Задача Коши для дифференциального уравнения в банаховом пространстве с условиями на резольвенту пучка. — *Дисс. канд. физ.-мат. наук* (1988).

[9] *А.Л. Пивень*, Разрешимость задачи Коши и оценки начального многообразия для одного неявного операторно-дифференциального уравнения. — *Вісн. Харків. ун-ту. Сер. Мат., прикл. мат. і механіка* (1999), № 458, с. 101–108.

[10] *А.А. Гольдберг, И.В. Островский*, Распределение значений мероморфных функций. Наука, Москва (1970).

[11] *Ю.М. Березанский*, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Наукова думка, Киев (1965).

[12] *М.А. Наймарк*, Линейные дифференциальные операторы. Наука, Москва (1969).

[13] *Ф.С. Рофе-Бекетов, А.М. Холькин*, Спектральный анализ дифференциальных операторов. Связь спектральных и осцилляционных свойств. Изд-во ФТИНТ НАНУ и Приазовск. гос. тех. ун-та, Мариуполь (2001).

[14] *В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук, А.Н. Кочубей*, Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи для дифференциальных уравнений. — *Укр. мат. журн.* (1989), т. 41, № 10, с. 1299–1313.

[15] *R. Beals*, Classes of compact operators and eigenvalue distributions for elliptic operators. — *Amer. J. Math.* (1967), v. 89, No. 4, p. 1056–1072.

[16] *И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн*, Введение в теорию линейных, несамосопряженных операторов. Наука, Москва (1965).

[17] *М.Г. Гасымов*, О кратной полноте части собственных и присоединенных векторов полиномиальных операторных пучков. *Изв. АН АрмССР* (1971), т. 6, № 2–3, с. 131–147.

Condition of completeness of elementary solutions for degenerate higher order operator differential equations

A.L. Piven

In a Banach space, the higher order abstract differential equation $\sum\limits_{j=0}^{n} A_j u^{(j)}(t) = 0$ is investigated. The operator A_n in the higher derivative may be degenerate. Conditions of approximation of solutions by linear combinations of elementary solutions have been obtained. Abstract results are applied to partial differential equations.