Математическая физика, анализ, геометрия *Краткие сообщения*
2005, т. 12, № 1, с. 107–113

О спектральном разложении по главным функциям одного квадратичного пучка на всей оси

Э.Г. Оруджев

Бакинский государственный университет
ул. Халилова, 23, Баку, AZ1148, Азербайджан
E-mail:elsharorucov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 12 февраля 2004 г.
Представлена Ф.С. Рофе-Бекетовым

В пространстве $L_2(-\infty,\infty)$ изучен пучок дифференциальных операторов, порожденный дифференциальным выражением второго порядка, главный характеристический многочлен которого имеет один корень с кратностью два, кроме того, коэффициенты дифференциального выражения содержат только положительные показатели Фурье. Построены решения соответствующих дифференциальных уравнений. Получено, что пучок имеет чисто непрерывный спектр, совпадающий с действительный осью. Для остальных точек комплексной плоскости спектрального параметра резольвента пучка есть интегральный оператор с ядром типа Карлемана. Для трижды непрерывно дифференцируемых финитных на $\pm\infty$ функций получено разложение по главным функциям непрерывного спектра.

У просторі $L_2(-\infty,\infty)$ вивчено пучок диференціальних операторів, що породжений диференціальним виразом другого порядку, головний характеристичний многочлен якого має один корінь з кратністю два. Крім того, коефіцієнти диференціального виразу мають тільки позитивні показники Фур'є. Побудовано розв'язки відповідних диференціальних рівнянь. Доведено, що пучок має чисто неперервний спектр, що співпадає з дійсною віссю. Для решти точок комплексної площини спектрального параметру резольвента пучка є інтегральним оператором з ядром типу Карлемана. Для тричі неперервно діференційовних фінітних на $\pm\infty$ функцій отримано розклад по головних функціях неперервного спектру.

В пространстве $L_2\,(-\infty,\infty)$ рассмотрим пучок дифференциальных операторов L_λ, порожденный дифференциальным выражением

$$l_\lambda(y) \equiv y'' - [2i\lambda + p(x)]\,y' + \left[-\lambda^2 + \lambda q(x) + r(x)\right] y, \tag{1}$$

Mathematics Subject Classification 2000: 34L05, 47E05.

где

$$p(x)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k e^{ikx},\ q(x)=\sum_{k=1}^{\infty}q_k e^{ikx},\ r(x)=\sum_{k=1}^{\infty}r_k e^{ikx}, \tag{2}$$

в предположении, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^m\left|p_k\right|,\ \sum_{k=1}^{\infty}k^m\left|q_k\right|,\ \sum_{k=1}^{\infty}k^m\left|r_k\right|,\ \ m=0,1,2, \tag{3}$$

сходятся.

Характеристическим уравнением, которое соответствует уравнению $l_\lambda(y)=0$, назовем уравнение, являющееся главной частью после подстановки в (1) $y=e^{\lambda\theta x}$:

$$\theta^2-2i\theta-1=0. \tag{4}$$

В работах [1, 2] изучены спектральные свойства подобных пучков для дифференциальных выражений высокого порядка, в двух случаях относительно корней главного характеристического многочлена: а) имеются только различные корни; б) имеются два различных корня, каждый из которых повторяется. Однако изложенные в этих работах подходы для нахождения решений дифференциальных уравнений, связанных с изученными дифференциальными выражениями, в нашем случае не позволяют найти представления решений уравнения $l_\lambda(y)=0$.

В данной работе изложен новый подход к задаче нахождения решений указанного уравнения. Далее, способами спектральной теории исследованы спектральные свойства пучка L_λ и получено разложение финитных функций, не содержащихся в области определения пучка L_λ, по главным функциям непрерывного спектра этого пучка.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты дифференциального выражения $l_\lambda(y)$ удовлетворяют условиям (2), (3). Тогда уравнение $l_\lambda(y)=0$ в каждой из полуплоскостей $\pi_\pm=\{\lambda:\pm\mathrm{Im}\lambda\geq 0\}$ имеет фундаментальную систему решений $y_k(x,\lambda)$, $k=1,2$:*

$$y_1(x,\lambda)=e^{i\lambda x}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}a_{k,m}\lambda^k\right)e^{imx},\quad a_{0,0}\neq 0, \tag{5}$$

$$y_2(x,\lambda)=xy_1(x,\lambda)+e^{i\lambda x}\sum_{m=0}^{\infty}D_m(\lambda)e^{imx}, \tag{6}$$

ряды (5), (6) сходятся вместе со своими производными по x до 2-го порядка включительно. При этом коэффициенты $D_m(\lambda)$ определяются из формулы Лиувилля–Остроградского через коэффициенты ряда (5).

Доказательство. Заменой $z = e^{ix}$ из уравнения $l_\lambda(y) = 0$ получаем уравнение

$$-z^2\frac{d^2y}{dz^2} + \left[2\lambda z - i\sum_{k=1}^{\infty} p_k z^{k+1} - z\right]\frac{dy}{dz}$$

$$+\left[-\lambda^2 + \lambda\sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} r_k z^k\right] y = 0, \tag{7}$$

с регулярной особой точкой $z = 0$. При такой замене точки вещественной оси $-\infty < x < \infty$ отображается в $z = e^{ix}$, лежащие на окружности $|z| = 1$ с центром в начале координат, радиуса единица. Когда x непрерывно изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ точка z описывает бесконечное число раз окружность в одном и том же (положительном) направлении.

Положим

$$y = z^\rho \sum_{m=0}^{\infty} C_m z^m, \quad \text{где} \;\; C_0 \neq 0, \tag{8}$$

и после подстановки в дифференциальное уравнение (7) получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m \left[-(\rho+m)(\rho+m-1) + 2\lambda(\rho+m) - (\rho+m) - \lambda^2\right] z^m$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\{-i\left[p_k C_0 \rho + p_{k-1}C_1(\rho+1) + \ldots + p_1 C_{k-1}(\rho+k-1)\right]$$

$$+\lambda\left[q_k C_0 + q_{k-1}C_1 + \ldots + q_1 C_{k-1}\right]$$

$$+\left[r_k C_0 + r_{k-1}C_1 + \ldots + r_1 C_{k-1}\right]\} z^k = 0. \tag{9}$$

Приравниваем к нулю коэффициенты при последовательных степенях z.

Наинизшая степень z есть z^0. Приравнивая коэффициент при ней нулю, получаем уравнение

$$C_0\left[\rho - \lambda\right]^2 = 0, \tag{10}$$

которое называется определяющим уравнением.

Приравнивая нулю коэффициент при z, находим

$$C_1\left[-(\rho+1)\rho + 2\lambda(\rho+1)\right] - ip_1 C_0 \rho$$

$$-C_1(\rho+1) - \lambda^2 C_1 + \lambda q_1 C_0 + r_1 C_0 = 0$$

или

$$C_1 = C_0\left[r_1 + (q_1 - ip_1)\lambda\right].$$

Точно так же

$$C_2=\frac{1}{2^2}C_0\left\{\frac{1}{1^2}\left[(q_1-ip_1)\lambda+r_1\right]\left[(q_1-ip_1)\lambda+(r_1-ip_1)\right]+\left[r_2+(q_2-ip_2)\lambda\right]\right\}$$

и т.д.

$$C_m=\frac{1}{m^2}\left\{C_{m-1}\left[-ip_1(\lambda+m-1)+\lambda q_1+r_1\right]+\ldots+C_1\left[-ip_{m-1}(\lambda+1)\right.\right.$$

$$\left.\left.+q_{m-1}\lambda+r_{m-1}\right]+C_0\left[-ip_m\lambda+q_{m-1}\lambda+r_m\right]\right\},$$

и находим, что

$$C_k=C_0\left[\sum_{m=0}^{k}a_{m,k}\lambda^m\right], \tag{11}$$

где $a_{m,k}$ явно выражается через $r_i,p_i,q_i,\ i\leq m$. При этом приходится выполнять лишь действия сложения и умножения. Учитывая произвольность $C_0\neq 0$, возьмем $C_0=1$.

Из выражений (11) вытекает, что $C_k(\lambda)\sim\dfrac{A\lambda^k}{(k!)^2}$, $(k\to\infty)$, где A — комплексное число и $\dfrac{C_{k+1}(\lambda)}{C_k(\lambda)}\to 0$ при $k\to\infty$.

Ввиду того, что определяющее уравнение имеет два равных корня $\rho=\lambda$, то указанным приемом мы получим одно частное решение. Второе решение, линейно независимое с первым, находится из формулы Лиувилля–Остроградского [3, с. 110] и представляется в виде $y_2=z^\lambda\sum\limits_{m=0}^{\infty}D_m(\lambda)z^m+y_1 lnz$, где $D_m(\lambda)$ определяются рекуррентным образом через коэффициенты C_m из формулы Лиувилля–Остроградского.

Рассмотрение функций вида (2) показывает, что ряд (8) и ряд, содержащийся во втором решении, будут сходящимися для $|z|\leq 1$. Методом мажорантных рядов [3, с. 106–110] нетрудно показать, что это так. Решение можно распространить за пределы этого круга путем аналитического продолжения. Заметим, что разрез можно провести под любым углом θ_2 к положительной части действительной оси, предварительно обойдя начало координат произвольное число раз. Таким способом из бесконечного множества значений функции $\ln z$ можно построить бесконечное множество однозначных ветвей. Так как степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз внутри круга сходимости, то ряды, полученные дифференцированием (5), (6) по x, тоже сходятся. Отсюда и следует доказательство теоремы 1.

Легко устанавливается, что никакая нетривиальная линейная комбинация решений $y_1(x,\lambda),y_2(x,\lambda)$ уравнения $l_\lambda(y)=0$ не принадлежит пространству $L_2(-\infty,\infty)$. Отсюда вытекает, что пучок L_λ не имеет собственных значений (отсутствие собственных значений пучка L_λ можно доказать также методом работы [4] на основании теории Флоке).

Пусть $\mathrm{Im}\lambda > 0$. При $f(x) \in L_2(-\infty,\infty)$, отыскивая решения уравнения $l_\lambda(y) = f$, принадлежащие пространству $L_2(-\infty,\infty)$, в виде

$$y(x,\lambda) = \sum_{\nu=1}^{2} C_\nu(x,\lambda) y_\nu(x,\lambda), \tag{12}$$

и применяя метод вариации постоянных, получаем, что для финитных функций $f(x) \in L_2(-\infty,\infty)$ имеет место равенство

$$y(x,\lambda) = \int_{-\infty}^{x} \frac{-y_1(x,\lambda)y_2(\xi,\lambda) + y_2(x,\lambda)y_1(\xi,\lambda)}{W(\xi,\lambda)} f(\xi)d\xi, \tag{13}$$

где $W(\xi,\lambda)$ есть определитель Вронского от $y_1(\xi,\lambda)$, $y_2(\xi,\lambda)$.

Точно так же для $\mathrm{Im}\lambda < 0$ имеем

$$y(x,\lambda) = \int_{x}^{\infty} \frac{y_1(x,\lambda)y_2(\xi,\lambda) - y_2(x,\lambda)y_1(\xi,\lambda)}{W(\xi,\lambda)} f(\xi)d\xi. \tag{14}$$

Соотношения (13), (14) определяют некоторый ограниченный оператор в $L_2(-\infty,\infty)$ с ядрами $R^+(x,\xi,\lambda), R^-(x,\xi,\lambda)$ для $\mathrm{Im}\lambda > 0$ и $\mathrm{Im}\lambda < 0$ соответственно:

$$R^+(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} \frac{-y_1(x,\lambda)y_2(\xi,\lambda)+y_2(x,\lambda)y_1(\xi,\lambda)}{W(\xi,\lambda)}, & \xi \le x \\ 0, & \xi > x \end{cases} \tag{15}$$

$$R^-(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} 0, & \xi < x \\ \frac{y_1(x,\lambda)y_2(\xi,\lambda)-y_2(x,\lambda)y_1(\xi,\lambda)}{W(\xi,\lambda)}, & \xi \ge x \end{cases} \tag{16}$$

Ядра $R^\pm(x,\xi,\lambda)$ в точках λ, в которых $W(\xi,\lambda)$ мог бы обратиться в нуль, регуляризуются, т.е. $R^\pm(x,\xi,\lambda)$ не имеет полюсов в нулях знаменателя. Это свидетельствует о том, что у пучка L_λ отсутствуют спектральные особенности.

Теорема 2. *Все числа λ, $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$ принадлежат резольвентному множеству пучка L_λ. Для всех $\lambda : \pm\mathrm{Im}\lambda > 0$, резольвента R_λ пучка L_λ является ограниченным интегральным оператором*

$$R_\lambda f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x,\xi,\lambda) f(\xi)d\xi, \tag{17}$$

определенным во всем пространстве $L_2(-\infty,\infty)$, *с ядром*

$$R(x,\xi,\lambda)=\begin{cases} R^{+}(x,\xi,\lambda), & \mathrm{Im}\lambda>0,\\ R^{-}(x,\xi,\lambda), & \mathrm{Im}\lambda<0,\end{cases}\tag{18}$$

удовлетворяющим условиям типа Карлемана.

Теорема 3. *Все точки* λ *действительной оси являются точками непрерывного спектра. Этим спектр пучка* λ *исчерпывается*

Возьмем окружность $\Gamma_N=\{\lambda:|\lambda|=N\}$ большого радиуса N с центром в начале координат, полагая $\Gamma_N=\Gamma'_N+\Gamma''_N$, где Γ'_N — замкнутый контур в полуплоскости π_+, образованный полуокружностью Γ_N и прямой $\mathrm{Im}\lambda=+\varepsilon$, и Γ''_N — контур, который образован полуокружностью, находящейся в полуплоскости π_-, и прямой $\mathrm{Im}\lambda=-\varepsilon$, где $\varepsilon\to+0$. В равенстве $l_\lambda\left(R^{\pm}(x,\xi,\lambda)\right)_\xi=\delta(x-\xi)$ (где $\delta(x-\xi)$ — функция Дирака) выражая $R^{\pm}(x,\xi,\lambda)$ по формулам (15), (16) и учитывая это, интеграл (17) интегрируя по частям, затем, беря от $y(x,\lambda)$ (13), (14) интегралы по Γ'_N и Γ''_N и складывая, а контуры, взятые вдоль разрезов, прижимая к действительной оси, далее переходя к пределу при $N\to\infty$, приходим к следующей теореме:

Теорема 4. *Для трижды непрерывно дифференцируемых финитных в окрестности* $\pm\infty$ *функций имеет место равномерно сходящееся при всех* $x\in(-\infty,\infty)$ *разложение по главным функциям непрерывного спектра пучка* L_λ :

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda\left[R_{\lambda+i0}-R_{\lambda-i0}\right]fd\lambda,\tag{19}$$

где

$$\left[R_{\lambda+i0}-R_{\lambda-i0}\right]f=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[R^{+}(x,\xi,\lambda+i0)-R^{-}(x,\xi,\lambda-i0)\right]f(\xi)d\xi.$$

Список литературы

[1] *М.Г. Гасымов*, Спектральный анализ одного класса обыкновенных дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами. — *Докл. АН СССР* (1980), т. 252, № 2, с. 277–280.

[2] *Э.Г. Оруджев*, Резольвента и спектр одного класса дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами. — *Функц. анализ и его прил.* (2000), т. 34, № 3, с. 87–90.

[3] *Ф. Хартман*, Обыкновенные дифференциальные уравнения. Мир, Москва (1970).

[4] *Ф.С. Рофе-Бекетов*, О спектре несамосопряженных дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами. — *Докл. АН СССР* (1963), т. 152, № 6, с. 1312–1315.

On spectral decomposition by main functions of one quadratie bunch on the whole axis

E.G. Orudzhev

The bunch of differential operators generated by the differential expression of the second order whose main characteristic polynomial has one root with the multiplicity two is considered, when the coefficients of differential expression contain only positive Fourier index in the space $L_2(-\infty, \infty)$. The solutions of corresponding differential equations are constructed. It is obtained that the bunch has purely continuous spectrum coinciding with whole real axis. For other points of complex plane of spectral parameter the bunch resolvent is integral operator with Carleman type kernel. The decomposition by main functions of continuous spectrum is obtained for triply continuous differentialble compactly supported functions.