Математическая физика, анализ, геометрия *Краткие сообщения*
2005, т. 12, № 1, с. 119–125

Теоретико-операторное доказательство теоремы Арнольда о перемежаемости и ее обобщение

Ф.С. Рофе-Бекетов

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, Харьков, 61103, Украина

E-mail:rofebeketov@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 22 декабря 2004 г.

Для операторного дифференциального уравнения установлено обобщение теоремы Арнольда о перемежаемости и доказана осцилляционная теорема типа Штурма в случае краевых условий общего вида.

Для операторного диференціального рівняння отримано узагальнення теореми Арнольда про альтернацію та доведено осциляційну теорему типу Штурма у випадку граничних умов загального вигляду.

Начнем с обобщения осцилляционной теоремы типа Штурма для бесконечной системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$l[y] \equiv -(P(t)y' + R(t)y)' + R^*(t)y' + Q(t)y = \lambda W(t)y \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\cos A \cdot y^{[1]}(a) - \sin A \cdot y(a) = 0, \tag{2}$$

$$\cos B \cdot y^{[1]}(b) + \sin B \cdot y(b) = 0. \tag{3}$$

Здесь коэффициенты $P(t) = P^*(t) \gg 0$, $Q(t) = Q^*(t)$, $W(t) = W^*(t) \gg 0$, $R(t)$ являются непрерывными, $P(t)$ и $R(t)$ — непрерывно дифференцируемыми оператор-функциями из $B(H)$, $A = A^* \in B(H)$, $B = B^* \in B(H)$, где H — сепарабельное гильбертово пространство, $y(t)$ — вектор-функция в H,

$$y^{[1]}(t) := P(t)y'(t) + R(t)y(t) \tag{4}$$

— квазипроизводная. Кроме того, пусть

$$-\frac{\pi}{2}I \ll A, B \le \frac{\pi}{2}I, \tag{5}$$

Mathematics Subject Classification 2000: 34L05, 47E05.

чем гарантируется при $\dim H = \infty$ полуограниченность снизу ([1, 2]) самосопряженного оператора L, порожденного задачей (1)–(3) в гильбертовом пространстве $H(a,b) = L_2\{H;\, a,b;\, W(t)dt\}$ со скалярным произведением $\langle u,v\rangle = \int\limits_a^b (W(t)u(t), v(t))_H dt$.

При $\dim H < \infty$ задача (1)–(3) полуограничена и без условия (5) и спектр ее чисто дискретен. Однако при $\dim H = \infty$ существенный спектр задачи (1)–(3) не пуст ([1, 3]). Обозначим его точную нижнюю грань λ_e, и пусть $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ — занумерованный с учетом кратности дискретный спектр, предшествующий λ_e. В случае, когда условие (3) имеет вид

$$y(b) = 0, \tag{6}$$

обозначим оператор L через L^0, его собственные числа через $\lambda_1^0 \le \lambda_2^0 \le \ldots$. Пусть $N(\lambda)$ и $N^0(\lambda)$ обозначают количество собственных чисел, меньших λ, для операторов L и L^0 соответственно при $\lambda \le \lambda_e$ или $\lambda \le \lambda_e^0$.

Пусть $Y(t,\lambda)$ — фундаментальное операторное решение задачи (1), (2) с начальными условиями

$$Y(a,\lambda) = \cos A, \qquad Y^{[1]}(a,\lambda) = \sin A. \tag{7}$$

$\operatorname{nul} Y(t,\lambda) := \dim \operatorname{Ker} Y(t,\lambda)$, $\operatorname{def} Y(t,\lambda) := \dim \operatorname{Coker} Y(t,\lambda)$.

Теорема 1 ([4–6]). *При $\lambda \le \lambda_e$ $(\le \infty)$ для задачи* (1),(2),(6)

$$\sum_{t\in(a,b)} \operatorname{nul} Y(t,\lambda) = N^0(\lambda)\ (\le \infty), \tag{8}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}:\ \operatorname{nul} Y(t,\lambda) = \operatorname{def} Y(t,\lambda). \tag{9}$$

(Для случая $R(t) \equiv 0$ эта теорема доказана в [7].)

Установим ее обобщение для общего самосопряженного краевого условия (3). Обозначим

$$Y[t,\lambda;B] := \cos B \cdot Y^{[1]}(t,\lambda) + \sin B \cdot Y(t,\lambda). \tag{10}$$

Теорема 2. *При $\lambda \le \lambda_e$ $(\le \infty)$ для задачи* (1)–(3)

$$\sum_{t\in(a,b)} \operatorname{nul} Y[t,\lambda,B] = N(\lambda), \tag{11}$$

$$\operatorname{nul} Y[t,\lambda,B] = \operatorname{def} Y[t,\lambda,B], \tag{12}$$

если

$$H_{22}(t,\lambda;B) := \cos B \cdot \left\{-Q(t) + \lambda W(t) + R^*(t)P^{-1}(t)R(t)\right\} \cos B + \sin B \cdot P^{-1}(t)R(t)\cos B + \cos B \cdot R^*(t)P^{-1}(t)\sin B + \sin B \cdot P^{-1}(t) \cdot \sin B \gg 0, \qquad a \le t \le b, \quad (13)$$

и если, кроме условия (5)*, полуограничен снизу оператор* h_a*, самосопряженный в замыкании своей области определения* $D(h_a)$*, где*

$$h_a := -(\cos A \sin B + \sin A \cos B)^{-1}(\cos A \cos B - \sin A \sin B) \ge c \cdot I_{\overline{D(h_a)}}, \qquad c \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

З а м е ч а н и е 1. Условие (13) всегда выполнено для достаточно больших λ, а условие (14) всегда выполнено при $\dim H < \infty$, т.е. для конечных систем.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известным образом система (1) сводится к системе первого порядка для вектор-функции $\operatorname{col}\{y, y^{[1]}\}$ в сдвоенном гильбертовом пространстве $H \oplus H$:

$$J\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix} = H(t,\lambda)\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где $J = \begin{pmatrix} 0_H & -I_H \\ I_H & 0_H \end{pmatrix}$, 0_H и I_H — нулевой и единичный операторы в H соответственно,

$$H(t,\lambda) = \begin{pmatrix} -Q + \lambda W + R^*P^{-1}R & -R^*P^{-1} \\ -P^{-1}R & P^{-1} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Сделаем теперь в системе (15) замену

$$\begin{pmatrix} z \\ z^{[1]} \end{pmatrix} = \Phi_B^*\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}, \qquad \Phi_B = \begin{pmatrix} \sin B & -\cos B \\ \cos B & \sin B \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Тогда краевому условию (3) отвечает условие

$$z(b) = 0, \quad (18)$$

а условие (2) переходит в

$$(\cos A \cdot \sin B + \sin A \cdot \cos B)z^{[1]}(a) + (\cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B)z(a) = 0, \quad (19)$$

которое, как легко видеть, порождается эрмитовым отношением ([8] или [9, гл. 7]), а потому является самосопряженным. Система (16), в силу замены (17), переходит в

$$J\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z \\ z^{[1]} \end{pmatrix} = H(t,\lambda,B)\begin{pmatrix} z \\ z^{[1]} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где положено
$$H(t,\lambda,B) = \Phi_B^* H(t,\lambda)\Phi_B. \tag{21}$$

Непосредственный подсчет дает для $H_{22}(t,\lambda;B)$ выражение (13), в силу условия позитивности которого существует непрерывно дифференцируемый обратный оператор $H_{22}^{-1}(t,\lambda;B)$. Поэтому гамильтонова система (20) эквивалентна следующей системе второго порядка вида (1):

$$-(P(t,\lambda,B)z' + R(t,\lambda,B)z)' + R^*(t,\lambda,B)z' + Q(t,\lambda,B)z = 0, \tag{22}$$

где
$$P(t,\lambda,B) = H_{22}^{-1}(t,\lambda;B), \tag{23}$$

и при $\lambda \in \mathbb{R},\ B^* = B$ имеем

$$P(t,\lambda,B)^* = P(t,\lambda,B), \qquad Q(t,\lambda,B)^* = Q(t,\lambda,B).$$

Считая λ фиксированным, а правую часть (22) полагая равной $\mu z(t,\lambda)$ при $\mu = 0$, где μ — новый спектральный параметр, мы можем применить теорему 1 к краевой задаче (22), (19), (18), спектр которой дискретен при $\mu < 0$, если $\lambda \le \lambda_e$. Пусть $Z(t,\lambda,B;\mu)|_{\mu=0}$ есть фундаментальное решение задачи (22), (19), $N_\lambda^0(0)$ — количество отрицательных собственных значений μ_k задачи (22), (19), (18). Тогда

$$\sum_{t\in(a,b)} \operatorname{nul} Z(t,\lambda,B;0) = N_\lambda^0(0), \tag{24}$$

что в силу замены (17) дает теорему 2.

Перейдем теперь к теореме перемежаемости Арнольда. В [10] она сформулирована следующим образом, если применить наши обозначения.

Теорема 3 (о перемежаемости. В.И. Арнольд [10]). *Если функция Гамильтона $H(t)$ положительно определена на лагранжевых плоскостях α и β, то числа ν моментов нетрансверсальности эволюционирующей по закону* (15) *лагранжевой плоскости с одной и другой из них различаются на любом отрезке не более, чем на число степеней свободы:*

$$|\nu_\alpha - \nu_\beta| \le \dim H \ (< \infty). \tag{25}$$

(В [10] речь идет о вещественном конечномерном пространстве H, $\lambda = 0$.)

Следствие 1 ([10]). *На отрезке, содержащем $1 + \dim H$ моментов нетрансверсальности к α, найдется момент нетрансверсальности к β.*

Выведем теорему перемежаемости для $\dim H \leq \infty$ из наших рассмотрений. Поясним, что всякая лагранжева плоскость в $H \oplus H$ относительно косоэрмитова скалярного произведения $\left[\binom{u}{v}, \binom{s}{w}\right] := (v,s) - (u,w)$ может быть задана уравнением

$$\cos A \cdot v - \sin A \cdot u = 0, \tag{26}$$

где $A = A^*$ — соответствующий самосопряженный оператор в H, и при любом $A = A^*$ уравнением (26) определяется некоторая лагранжева плоскость в $H \oplus H$, состоящая из векторов вида $u \oplus v$.

Уравнением (26) задается также эрмитово (иначе — самосопряженное) бинарное отношение в H, и каждое эрмитово отношение представимо в виде (26) (см. [8] или [9, гл. 7]). Всякое фундаментальное решение $Y(t,\lambda)$ системы (1), подчиненное некоторому самосопряженному краевому условию в какой-нибудь точке (напр., (2) при $t = a$) само порождает эволюционирующую по t (при каждом $\lambda \in \mathbb{R}$) лагранжеву плоскость, которая задана эрмитовым отношением

$$Y^*(t,\lambda)v - Y^{[1]*}(t,\lambda)u = 0, \tag{27}$$

представимым в форме (26) с самосопряженным $A = A(t,\lambda)$ (см. [11], [9, гл. 2]). При $u = y$, $v = y^{[1]}$ отношение (27) представляет собою самосопряженное краевое условие в точке t для системы (1).

Итак, пусть при фиксированном λ лагранжева плоскость, управляемая уравнением (15) (или эквивалентным уравнением (1)), определена краевым условием (2) с соответственно подобранным A. Лагранжевы плоскости α и β, по отношению к которым рассматриваются моменты нетрансверсальности эволюционирующей лагранжевой плоскости, пусть заданы условием (3) с B и B_1, соответственно. Тогда, если для каждой пары A, B и A, B_1 выполнено условие полуограниченности (14) (которое при $\dim H < \infty$ выполнено автоматически), и так как по условию позитивности на каждой из двух лагранжевых плоскостей α и β гамильтониана $H(t,\lambda)$ (15) мы имеем (13) и аналогично

$$H_{22}(t,\lambda,B_1) \gg 0, \qquad a \leq t \leq b, \tag{28}$$

то отсюда по доказанной теореме 2 следует (11) и аналогично

$$\sum_{t\in(a,b)} \operatorname{nul} Y[t,\lambda;B_1] = N_1(\lambda), \tag{29}$$

где $Y[t,\lambda;B_1]$ задано формулой (10) с B_1 вместо B в условии (3). (Напомним, что условия (5) мы считаем выполненными для A, B и B_1.)

Но по лемме 1.4 из [9] (или по лемме из [7]) мы имеем, что

$$|N(\lambda) - N_1(\lambda)| \leq p := \operatorname{Def} \Lambda \leq \dim H, \tag{30}$$

где Λ есть симметрический оператор с индексом дефекта (p,p), представляющий собою наибольшую общую часть двух самосопряженных операторов, отвечающих задачам (1)–(3) с B и, соответственно, с B_1 в (3). Несложно показать, как это сделано, например, при доказательстве теоремы 2 в [6] (или теоремы 4.2 в [9]), что

$$p := \operatorname{Def}\Lambda = \operatorname{rnk}\{\sin B_1 \cdot \cos B - \cos B_1 \cdot \sin B\}, \tag{31}$$

что вместе с (30), (29) и (11) приводит нас к следующему обобщению теоремы перемежаемости 3.

Теорема 4. *При перечисленных выше условиях*

$$\left|\sum_{t\in(a,b)} \operatorname{nul} Y[t,\lambda,B] - \sum_{t\in(a,b)} \operatorname{nul} Y[t,\lambda,B_1]\right| \\ \le \operatorname{Def}\Lambda = \operatorname{rnk}\{\sin B_1 \cdot \cos B - \cos B_1 \cdot \sin B\} \le \dim H \le \infty. \tag{32}$$

Следствие 2. *На отрезке, содержащем* $1+\operatorname{Def}\Lambda$ *точек, где* $\operatorname{nul} Y[t,\lambda,B] > 0$*, найдется точка, где* $\operatorname{nul} Y[t,\lambda,B_1] > 0$*. (Если* $\operatorname{Def}\Lambda < \infty$*.)*

Список литературы

[1] *Ф.С. Рофе-Бекетов*, Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений в несамосопряженном и самосопряженном случаях. — *Мат. сб.* (1960), т. 51, № 3, с. 293–342.

[2] *М.Л. Горбачук, В.А. Михайлец*, Полуограниченные самосопряженные расширения симметрических операторов. — *Докл. АН СССР* (1976), т. 51, № 3, с. 765–767.

[3] *В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук*, Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Наукова думка, Киев (1984).

[4] *Ф.С. Рофе-Бекетов, А.М. Холькин*, Связь спектральных и осцилляционных свойств систем произвольного порядка. — *Докл. АН СССР* (1981), т. 261, № 3, с. 551–555.

[5] *Ф.С. Рофе-Бекетов, А.М. Холькин*, Связь спектральных и осцилляционных свойств дифференциально-операторных уравнений произвольного порядка. *Препринт ФТИНТ АН УССР* (1985), № 8–85, 31 с.

[6] *Ф.С. Рофе-Бекетов, А.М. Холькин*, Связь спектральных и осцилляционных свойств дифференциально-операторных уравнений произвольного порядка. Ч. I. Теоремы типа Штурма. — *Теория функций, функц. анализ и их прил.* (1987), вып. 48, с. 101–111.

[7] *Ф.С. Рофе-Бекетов, А.М. Холькин,* О связи между спектральными и осцилляционными свойствами матричной задачи Штурма–Лиувилля. — *Мат. сб.* (1977), т. 102, № 3, с. 410–424.

[8] *Ф.С. Рофе-Бекетов,* О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций. — *Теория функций, функц. анализ и их прил.* (1969), вып. 8, с. 3–24.

[9] *Ф.С. Рофе-Бекетов, А.М. Холькин,* Спектральный анализ дифференциальных операторов. Связь спектральных и осцилляционных свойств. Изд-во ФТИНТ НАНУ и Приазовск. гос. тех. ун-та, Мариуполь (2001).

[10] *В.И. Арнольд,* Теоремы Штурма и симплектическая геометрия. — *Функц. анализ и его прил.* (1985), т. 19, № 4, с. 1–10.

[11] *Ф.С. Рофе-Бекетов, А.М. Холькин,* Фундаментальная система решений операторного дифференциального уравнения с краевым условием на бесконечности. — *Мат. заметки* (1984), т. 36, № 5, с. 697–709.

Operator theoretical proof of the Arnold alternation theorem and its generalization

F.S. Rofe-Beketov

A generalization of the Arnold alternation theorem and the Sturm oscillation theorem in the case of general boundary conditions, both in the context of operator differential equations, are obtained.