Математическая физика, анализ, геометрия
2005, т. 12, № 2, с. 131–147

Малые колебания вязкой несжимаемой жидкости с мелкими твердыми взаимодействующими частицами большой плотности

М.А. Бережной

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, Харьков, 61103, Украина
E-mail:berezhny@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 12 октября 2004 г.
Представлена Е.Я. Хрусловым

Рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости с большим числом малых твердых шарообразных частиц большой плотности, взаимодействующих между собой. Изучается асимптотическое поведение малых колебаний такой системы, когда радиусы частиц, расстояния между ближайшими частицами и силы взаимодействия между ними согласованно уменьшаются, а плотность вещества частиц соответствующим образом увеличивается. Выводятся уравнения, описывающие усредненную модель такой системы.

Розглядається рух в'язкої нестисливої рідини з великою кількістю дрібних твердих кулястих часток великої густини, що взаємодіють між собою. Вивчається асимптотична поведінка малих коливань такої системи, коли радіуси часток, відстані між найближчими частками та сили взаємодії між ними узгоджено зменшуються, а густина речовини часток відповідним чином збільшується. Виводяться рівняння, що описують усереднену модель такої системи.

1. Постановка задачи

Рассмотрим ограниченную область Ω в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$, которая заполнена вязкой несжимаемой жидкостью, содержащей большое число $N_\varepsilon = O(\varepsilon^{-3})$ малых шарообразных тел Q_ε^i (в дальнейшем будем называть их частицами). От малого параметра ε зависят радиусы частиц $r_i^\varepsilon = r_i\varepsilon^3$, расстояния между ближайшими частицами $r_{ij}^\varepsilon = c_{ij}^r\varepsilon$, силы взаимодействия между ними $f_{ij}^\varepsilon = c_{ij}^f\varepsilon^2$ и плотность вещества частиц $\rho_s^\varepsilon = c_s\varepsilon^{-6}$; полагаем,

Mathematics Subject Classification 2000: 35B27, 35Q30, 74Q10, 76M30, 76M50.

что $0 < c_1 \le c_s$, c_{ij}^r, c_{ij}^f, $r_i \le c_2 < \infty$, где постоянные c_1 и c_2 не зависят от ε. Будем предполагать, что частицы взаимодействуют друг с другом. Кроме того, считаем, что частицы, находящиеся на расстояниях, меньших $C\varepsilon$ (C>0), от неподвижной границы $\partial\Omega$, взаимодействуют с ней. Формально можно полагать, что эти частицы взаимодействуют с некоторыми другими частицами Q_ε^i, совпадающими с частями неподвижной границы $\partial\Omega$; для них $\underline{u}_\varepsilon^i = 0$ и $\underline{\theta}_\varepsilon^i = 0$. Система при нулевой скорости течения жидкости находится в равновесном состоянии. Тогда энергия взаимодействия частиц друг с другом в окрестности положения равновесия может быть записана в виде

$$H_\varepsilon(\underline{u}_\varepsilon) = H_\varepsilon(\underline{0}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N_\varepsilon} \langle C_\varepsilon^{ij}(\underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j), \underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j\rangle + h(\underline{u}_\varepsilon), \tag{1.1}$$

где скобки $\langle\,,\rangle$ обозначают скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, $\underline{u}_\varepsilon^i$ — смещение центра частицы Q_ε^i, $\underline{u}_\varepsilon = (\underline{u}_\varepsilon^1, \dots, \underline{u}_\varepsilon^{N_\varepsilon})$, а через $h(\underline{u}_\varepsilon)$ обозначена величина более высокого по $|\underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j|$ порядка малости. Матрица C_ε^{ij} определяется равенством

$$C_\varepsilon^{ij}\underline{u} = k^{ij}\varepsilon^2\langle\frac{\underline{u}}{|\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j|}, \underline{e}_\varepsilon^{ij}\rangle\underline{e}_\varepsilon^{ij}, \tag{1.2}$$

где $0 < k_1 \le k^{ij} \le k_2 < \infty$, постоянные k_1 и k_2 не зависят от ε, а $\underline{e}_\varepsilon^{ij} = \dfrac{\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j}{|\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j|}$.

Введем следующие обозначения:

$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{N} Q_\varepsilon^i$ — область, занятая жидкостью;

ρ — удельная плотность жидкости;

μ — динамическая вязкость жидкости;

ρ_s^ε — удельная плотность вещества частиц;

$\underline{x}_\varepsilon^i$ — радиус-вектор центра частицы Q_ε^i, отвечающий равновесному положению частиц;

$\underline{\theta}_\varepsilon^i$ — вектор угла поворота частицы Q_ε^i;

m_ε^i — масса частицы Q_ε^i;

$I_\varepsilon^i = \dfrac{2}{5}m_\varepsilon^i(r_\varepsilon^i)^2$ — момент инерции шаровидной частицы Q_ε^i.

Тогда линеаризованная система уравнений, описывающая малые нестационарные движения жидкости с твердыми частицами, может быть записана в виде

$$\rho\frac{\partial \underline{v}_\varepsilon}{\partial t} - \mu\Delta\underline{v}_\varepsilon = \nabla p_\varepsilon, \quad \mathrm{div}\underline{v}_\varepsilon = 0 \quad \underline{x} \in \Omega_\varepsilon; \tag{1.3}$$

$$\underline{v}_\varepsilon = \underline{\dot{u}}_\varepsilon^i + \underline{\dot{\theta}}_\varepsilon^i \times (\underline{x} - \underline{x}_\varepsilon^i), \quad \underline{x} \in S_\varepsilon^i; \tag{1.4}$$

$$m_\varepsilon^i \underline{\ddot{u}}_\varepsilon^i + \int\limits_{S_\varepsilon^i} \sigma[\underline{v}_\varepsilon]\nu \, ds = -\nabla_{\underline{u}_\varepsilon^i} H_\varepsilon; \tag{1.5}$$

$$I_\varepsilon^i \underline{\ddot{\theta}}_\varepsilon^i + \int\limits_{S_\varepsilon^i} (\underline{x} - \underline{x}_\varepsilon^i) \times \sigma[\underline{v}_\varepsilon]\underline{\nu} \, ds = -\nabla_{\underline{\theta}_\varepsilon^i} H_\varepsilon (\equiv 0). \tag{1.6}$$

Здесь $\underline{v}_\varepsilon = \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, t)$ — скорость жидкости, $p_\varepsilon = p_\varepsilon(\underline{x}, t)$ — давление, ν — единичный вектор внутренней нормали к поверхности S_ε^i частицы Q_ε^i, а $\sigma[\underline{v}] = \left\{\sigma_{kl}[\underline{v}] = \mu\Big(\dfrac{\partial \underline{v}_k}{\partial x_l} + \dfrac{\partial \underline{v}_l}{\partial x_k}\Big) - p_\varepsilon \delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^3$ — тензор напряжений.

Эту систему уравнений дополним следующими начальными условиями

$$\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, 0) = \underline{v}_{\varepsilon 0}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega_\varepsilon; \tag{1.7}$$

$$\underline{u}_\varepsilon^i(0) = 0, \, \underline{\dot{u}}_\varepsilon^i(0) = \underline{v}_\varepsilon^i, \, \underline{\theta}_\varepsilon^i(0) = 0, \, \underline{\dot{\theta}}_\varepsilon^i(0) = \underline{\theta}_{\varepsilon 1}^i \tag{1.8}$$

и краевым условием на $\partial\Omega$

$$\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, t) = 0, \quad \underline{x} \in \partial\Omega. \tag{1.9}$$

Теорема 1. *Задача* (1.3)–(1.9) *имеет единственное решение.*

Основной целью нашей работы является изучение асимптотического поведения при $\varepsilon \to 0$ решения задачи (1.3)–(1.9). Здесь мы предполагаем, что плотность вещества частичек неограниченно возрастает, когда их диаметры стремятся к нулю. Случаи мелких и крупных частиц, плотность которых ρ_s^ε не зависела от ε, были рассмотрены в работах [1] и [2].

Перед тем, как сформулировать основной результат, введем некоторые предположения и определения.

2. Дополнительные предположения и основной результат

Рассмотрим куб K_h^x с центром в точке $\underline{x} \in \Omega$ и ребром h ($\varepsilon \ll h \ll 1$). Будем считать, что ребра куба параллельны координатным осям. Обозначим через $\mathfrak{N}(\underline{x}, \varepsilon, h)$ множество решетчатых вектор-функций $\underline{w}_\varepsilon$, определенных в точках $\underline{x}_\varepsilon^i \in K_h^x$ ($\underline{w}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i) = \underline{w}_\varepsilon^i$). Определим на этом множестве функционал

$$E_{\varepsilon h}^\gamma(\underline{w}_\varepsilon, \underline{x}, T) = \frac{1}{2}\sum_{i,j \ \ K_h^x} \langle C_\varepsilon^{ij}(\underline{w}_\varepsilon^i - \underline{w}_\varepsilon^j), \underline{w}_\varepsilon^i - \underline{w}_\varepsilon^j \rangle$$

$$+ h^{-2-\gamma}\varepsilon^3 \sum_{i \ \ K_h^x} |\underline{w}_\varepsilon^i - \sum_{q,r=1}^3 T_{qr} \underline{\varphi}^{qr}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x})|^2, \tag{2.1}$$

где

$$\underline{\varphi}^{qr}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(x_r \underline{e}^q + x_q \underline{e}^r),$$

$T = \{T_{qr}\}$ — некоторый положительный симметрический тензор второго ранга, $0<\gamma<2$, а $\sum_{i \quad K_h^x}$ распространяется на те i, для которых $\underline{x}_\varepsilon^i \in K_h^x$. Существует минимум этого функционала, являющийся квадратичной функцией компонент тензора T:

$$\min_{\underline{w}_\varepsilon \in \mathfrak{N}(\underline{x},\varepsilon,h)} E_{\varepsilon h}^\gamma(\underline{w}_\varepsilon, \underline{x}, T) = \sum_{n,p,q,r=1}^{3} a_{npqr}^\gamma(\underline{x}, \varepsilon, h) T_{np} T_{qr}, \tag{2.2}$$

где $a_{npqr}^\gamma(\underline{x}, \varepsilon, h)$ — компоненты тензора четвертого ранга, определяемые формулой

$$a_{npqr}^\gamma(\underline{x}, \varepsilon, h) = \frac{1}{2} \sum_{i,j \quad K_h^x} \langle C_\varepsilon^{ij} \left(\underline{w}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{w}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^j)\right), \underline{w}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{w}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^j)\rangle$$

$$+ h^{-2-\gamma}\varepsilon^3 \sum_{i \quad K_h^x} \langle \underline{w}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{\varphi}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}), \underline{w}^{qr}(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{\varphi}^{qr}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x})\rangle. \tag{2.3}$$

Здесь через $\underline{w}^{np}$ обозначена решетчатая вектор-функция из $\mathfrak{N}(\underline{x}, \varepsilon, h)$, минимизирующая функционал (2.1) при $T = T^{np} = \dfrac{1}{2}(\underline{e}^n \otimes \underline{e}^p + \underline{e}^p \otimes \underline{e}^n)$. Будем называть тензор (2.3) тензором упругости системы взаимодействующих частиц. Кроме того, рассмотрим тензор сопротивления $\{C_{kl}(Q_\varepsilon^i)\}$ частички Q_ε^i потоку жидкости. В нашем случае (когда частички представляют собой шарики) компоненты этого тензора имеют вид

$$C_{kl}(Q_\varepsilon^i) = 6\pi\mu\, r_\varepsilon^i \delta_{kl}.$$

Построим теперь по решению $\{\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, t),\ \underline{u}_\varepsilon^i,\ \underline{\theta}_\varepsilon^i,\ i = \overline{1, N_\varepsilon}\}$ задачи (1.3)–(1.9) вектор-функцию

$$\underline{\tilde{v}}_\varepsilon(\underline{x}, t) = \chi_\varepsilon(\underline{x}) \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, t) + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \chi_\varepsilon^i(\underline{x}) [\underline{\dot{u}}_\varepsilon^i + \underline{\dot{\theta}}_\varepsilon^i \times (\underline{x} - \underline{x}_\varepsilon^i)] \tag{2.4}$$

и кусочно-линейный сплайн

$$\underline{w}_\varepsilon(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \underline{\dot{u}}_\varepsilon^i(t) L_\varepsilon^i(\underline{x}), \tag{2.5}$$

где $\chi_\varepsilon(\underline{x})$ — характеристическая функция области Ω_ε, заполненной жидкостью, $\chi_\varepsilon^i(\underline{x})$ — характеристическая функция частички Q_ε^i, функция $L_\varepsilon^i(\underline{x}_\varepsilon^j) = \delta_{ij}$, а в остальные точки она продолжается по линейности.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

2.1) на геометрию:
центры масс $\underline{x}_\varepsilon^i$ частичек находятся в вершинах симплексов, триангулизующих область Ω, причем телесные углы при вершинах симплексов равномерно по ε отделены от 0;

2.2) на характер взаимодействия:
взаимодействуют между собой частицы Q_ε^i и Q_ε^j, находящиеся на расстоянии $O(\varepsilon)$, так что матрица взаимодействия $C_\varepsilon^{ij} = 0$, если $dist(Q_\varepsilon^i, Q_\varepsilon^j) \geq C_1\varepsilon\,(C_1 > 0)$; при этом обязательно взаимодействуют пары частиц, соединенных общим ребром симплекса;

2.3) на начальные данные:
a) последовательность вектор-функций $\underline{w}_{\varepsilon 0}(\underline{x}) = \underline{w}_\varepsilon(\underline{x}, 0)$ ограничена равномерно по ε в $H^1(\Omega)$, а при $\varepsilon \to 0$ сходится в $\mathbf{L_2(\Omega)}$ к непрерывной вектор-функции $\underline{w}_0(\underline{x})$;
b) последовательность вектор-функций $\underline{\tilde{v}}_{\varepsilon 0}(\underline{x}) = \underline{\tilde{v}}_\varepsilon(\underline{x}, 0)$ при $\varepsilon \to 0$ сходится в $\mathbf{L_2(\Omega)}$ к непрерывной вектор-функции $\underline{v}_0(\underline{x})$;

2.4) функция $\rho_{1\varepsilon}(\underline{x}) = \rho_s^\varepsilon \sum\limits_{i=1}^{N} \chi_\varepsilon^i(\underline{x})$ при $\varepsilon \to 0$ сходится в пространстве обобщенных функций $D'(\Omega)$ к непрерывной функции $\rho_1(\underline{x}) > 0$;

2.5) равномерно по $\underline{x} \in \Omega$ существуют следующие пределы:

$$a)\ \lim_{h\to 0}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{a_{npqr}^\gamma(\underline{x}, \varepsilon, h)}{h^3} = \lim_{h\to 0}\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{a_{npqr}^\gamma(\underline{x}, \varepsilon, h)}{h^3} = a_{npqr}(\underline{x}),$$

$$b)\ \lim_{h\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{h^3}\sum_{i\quad K_h^x} r_i^\varepsilon = r(\underline{x}) > 0,$$

где $\{a_{npqr}(\underline{x})\}$ — непрерывный положительно определенный тензор, а $r(\underline{x})$ — непрерывная функция.

Основной результат этой работы состоит в следующем.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия 2.1)–2.5). Тогда вектор-функция* $\underline{\tilde{v}}_\varepsilon(\underline{x}, t)$, *определенная в* (2.4), *для любого* $T{>}0$ *сходится слабо в* $L_2(\Omega \times$

$[0,T])$ *к вектор-функции* $\underline{v}(\underline{x},t)$ *такой, что пара* $\{\underline{v}(\underline{x},t),\underline{w}(\underline{x},t)\}$ *является решением следующей начально-краевой задачи:*

$$\rho\frac{\partial\underline{v}}{\partial t}-\mu\Delta\underline{v}+C(\underline{x})[\underline{v}-\underline{w}]=\nabla p,\quad div\underline{v}=0,\quad \underline{x}\in\Omega,\quad t>0; \tag{2.6}$$

$$\rho_1\frac{\partial^2\underline{w}}{\partial t^2}+C(\underline{x})\frac{\partial\underline{w}}{\partial t}-\sum_{n,p,q,r=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_p}\big(a_{npqr}(\underline{x})e_{qr}[\underline{w}]\big)\underline{e}^n=C(\underline{x})\frac{\partial\underline{v}}{\partial t},$$
$$\underline{x}\in\Omega,\quad t>0; \tag{2.7}$$

$$\underline{v}(\underline{x},t)=\underline{w}(\underline{x},t)=0,\quad \underline{x}\in\partial\Omega; \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered}\underline{v}(\underline{x},0)=\underline{v}_0(\underline{x}),\quad \underline{w}(\underline{x},0)=\underline{w}_0(\underline{x}),\\ \frac{\partial\underline{w}(\underline{x},t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{1}{\rho_1(\underline{x})}\cdot C(\underline{x})\big(\underline{v}_0(\underline{x})-\underline{w}_0(\underline{x})\big),\quad \underline{x}\in\Omega,\end{gathered} \tag{2.9}$$

где $C(\underline{x})=6\pi\mu\, r(\underline{x})$, $a_{npqr}(\underline{x})$ *и* $r(\underline{x})$ *определены условием 2.5), а*

$$\Big\{e_{qr}[\underline{w}]=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\underline{w}_q}{\partial x_r}+\frac{\partial\underline{w}_r}{\partial x_q}\Big)\Big\}_{q,r=1}^{3}$$

— линеаризованный тензор деформаций.

Задача (2.6)–(2.9) *имеет единственное решение.*

3. Вариационная формулировка задачи

Перейдем к преобразованию Лапласа искомых функций переменной t, сохраняя за преобразованиями прежние обозначения: $\underline{\tilde{v}}_\varepsilon(\underline{x},t)\to\underline{v}_\varepsilon(\underline{x},\lambda)$, $p_\varepsilon(\underline{x},t)\to p_\varepsilon(\underline{x},\lambda)$, $\underline{u}_\varepsilon^i(t)\to\underline{u}_\varepsilon^i(\lambda)$, $\underline{\theta}_\varepsilon^i(t)\to\underline{\theta}_\varepsilon^i(\lambda)$. Здесь $Re\lambda>0$. Учитывая свойства преобразования Лапласа и (1.1), перепишем задачу (1.3)–(1.6) в виде

$$-\mu\Delta\underline{v}_\varepsilon+\lambda\rho\underline{v}_\varepsilon-\nabla p_\varepsilon=\rho\underline{v}_{\varepsilon0}(\underline{x}),\quad \operatorname{div}\underline{v}_\varepsilon=0,\quad \underline{x}\in\Omega_\varepsilon, \tag{3.1}$$

$$\underline{v}_\varepsilon=\lambda[\underline{u}_\varepsilon^i+\underline{\theta}_\varepsilon^i\times(\underline{x}-\underline{x}_\varepsilon^i)],\quad \underline{x}\in S_\varepsilon^i, \tag{3.2}$$

$$\lambda^2m_\varepsilon^i\underline{u}_\varepsilon^i+\int\limits_{S_\varepsilon^i}\sigma[\underline{v}_\varepsilon]\nu\,ds=-\sum_j^i C_\varepsilon^{ij}[\underline{u}_\varepsilon^i-\underline{u}_\varepsilon^j]+m_\varepsilon^i\underline{v}_\varepsilon^i, \tag{3.3}$$

$$\lambda^2I_\varepsilon^i\underline{\theta}_\varepsilon^i+\int\limits_{S_\varepsilon^i}(\underline{x}-\underline{x}_\varepsilon^i)\times\sigma[\underline{v}_\varepsilon]\nu\,ds=I_\varepsilon^i\underline{\theta}_{\varepsilon1}^i, \tag{3.4}$$

$$\underline{v}_\varepsilon(\underline{x})=0,\quad \underline{x}\in\partial\Omega. \tag{3.5}$$

Здесь $\sum_j^i$ обозначает суммирование по всем частицам Q_ε^j, взаимодействующим с частицей Q_ε^i. Будем продолжать вектор скорости $\underline{v}_\varepsilon(\underline{x},\lambda)$ на частицы Q_ε^i равенством (3.2), сохраняя за продолжением то же обозначение.

Зафиксируем теперь $\lambda>0$. Тогда задача (3.1)–(3.5) эквивалентна вариационной задаче

$$\Phi_\varepsilon(\underline{v}_\varepsilon)=\min_{\underline{v}'_\varepsilon\in \overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)}\Phi_\varepsilon(\underline{v}'_\varepsilon), \tag{3.6}$$

где $\overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$ — класс соленоидальных вектор-функций из $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, равных $\underline{a}_\varepsilon^i+\underline{b}_\varepsilon^i\times(\underline{x}-\underline{x}_\varepsilon^i)$ на частичках Q_ε^i (a_ε^i и b_ε^i — произвольные постоянные векторы), а

$$\Phi_\varepsilon(\underline{v}_\varepsilon)=\int_\Omega\Big\{2\mu\sum_{k,l=1}^{3}e_{kl}^2[\underline{v}_\varepsilon]+\lambda\langle\rho\underline{v}_\varepsilon,\underline{v}_\varepsilon\rangle-2\langle\rho\underline{v}_{\varepsilon 0},\underline{v}_\varepsilon\rangle\Big\}\,dx$$

$$+\frac{1}{2\lambda}\sum_{i,j=1}^{N_\varepsilon}\langle C_\varepsilon^{ij}[\underline{v}_\varepsilon(x_\varepsilon^i)-\underline{v}_\varepsilon(x_\varepsilon^j)],\underline{v}_\varepsilon(x_\varepsilon^i)-\underline{v}_\varepsilon(x_\varepsilon^j)\rangle$$

$$+\lambda\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\langle m_\varepsilon^i\underline{v}_\varepsilon(x_\varepsilon^i),\underline{v}_\varepsilon(x_\varepsilon^i)\rangle-2\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\langle m_\varepsilon^i\underline{v}_\varepsilon^i,\underline{v}_\varepsilon(x_\varepsilon^i)\rangle. \tag{3.7}$$

Рассмотрим также задачу минимизации

$$\Phi_0(\underline{v},\underline{w})=\min_{(\underline{v}',\underline{w}')\in\big(\overset{\circ}{J}(\Omega)\times\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)\big)}\Phi_0(\underline{v}',\underline{w}'), \tag{3.8}$$

где $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ — класс соленоидальных вектор-функций из $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, а

$$\Phi_0(\underline{v},\underline{w})=\int_\Omega\Big\{2\mu\sum_{k,l=1}^{3}e_{kl}^2[\underline{v}]+\langle C(\underline{x})[\underline{v}-\underline{w}],\underline{v}-\underline{w}\rangle+\lambda\langle\rho\underline{v},\underline{v}\rangle-2\langle\rho\underline{v}_0,\underline{v}\rangle$$

$$+\frac{1}{\lambda}\sum_{n,p,q,r=1}^{3}a_{npqr}(\underline{x})e_{np}[\underline{w}]e_{qr}[\underline{w}]+\lambda\langle\rho_1\underline{w},\underline{w}\rangle-2\langle\rho_1\underline{w}_0,\underline{w}\rangle\Big\}\,dx. \tag{3.9}$$

Легко видеть, что решение этой задачи удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$-\mu\Delta\underline{v}+C(\underline{x})[\underline{v}-\underline{w}]+\lambda\rho\underline{v}=\rho\underline{v}_0+\nabla p,\quad \operatorname{div}\underline{v}=0,\quad \underline{x}\in\Omega, \tag{3.10}$$

$$\lambda\rho_1\underline{w}-\frac{1}{\lambda}\sum_{n,p,q,r=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_p}\big(a_{npqr}(\underline{x})e_{qr}[\underline{w}]\big)\underline{e}^n+C[\underline{w}-\underline{v}]=\rho_1\underline{w}_0,\quad \underline{x}\in\Omega, \tag{3.11}$$

$$\underline{v}(\underline{x},t)=\underline{w}(\underline{x},t)=0,\quad \underline{x}\in\partial\Omega. \tag{3.12}$$

Будем изучать теперь асимптотическое поведение при $\varepsilon\to 0$ решения вариационной задачи (3.6).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия 2.1)–2.5). Тогда решение задачи (3.6) для любого* $\lambda>0$ *сходится при* $\varepsilon\to 0$ *к решению* $\{\underline{v}(\underline{x},\lambda),\underline{w}(\underline{x},\lambda)\}$ *задачи (3.8) в следующем смысле:*

$$\underline{v}_\varepsilon(\underline{x},\lambda)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\underline{v}(\underline{x},\lambda)\quad \textit{в}\quad L_2(\Omega),$$

$$\underline{w}_\varepsilon(\underline{x},\lambda)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\underline{w}(\underline{x},\lambda)\quad \textit{в}\quad L_2(\Omega).$$

Доказательство этой теоремы будет представлено в разд. 4, 5.

4. Компактность семейства решений вариационной задачи (3.6)

Здесь нам понадобится дискретное неравенство Корна для сплайнов (2.5) (см.[3]):

$$\|\underline{w}_\varepsilon(\underline{x})\|^2_{H^1(\Omega)}\le c\cdot\sum_{i,j}\langle C^{ij}_\varepsilon(\underline{w}^i_\varepsilon-\underline{w}^j_\varepsilon),\underline{w}^i_\varepsilon-\underline{w}^j_\varepsilon\rangle, \tag{4.1}$$

где $\underline{w}^i_\varepsilon=\underline{w}_\varepsilon(\underline{x}^i_\varepsilon)=\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}^i_\varepsilon)$ ($\underline{w}^i_\varepsilon=0$ при $\underline{x}^i_\varepsilon\in\partial\Omega$), а постоянная c не зависит от ε. Заметим, что в силу определения (2.5) существуют константы $c_2\ge c_1>0$, не зависящие от ε и такие, что

$$c_1\cdot\|\underline{w}_\varepsilon(\underline{x})\|^2_{H^1(\Omega)}\le\varepsilon{\sum_{i,j}}'|\underline{w}^i_\varepsilon-\underline{w}^j_\varepsilon|^2+\varepsilon^3\sum_i|\underline{w}^i_\varepsilon|^2\le c_2\cdot\|\underline{w}_\varepsilon(\underline{x})\|^2_{H^1(\Omega)},$$

где суммирование ${\sum_{i,j}}'$ распространяется на все пары частиц, центры масс которых соединены ребрами симплексов, триангулизующих область Ω. Отсюда и из условия 2.3а) следует, в частности, равномерная по ε ограниченность величин

$$\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}m^i_\varepsilon|\underline{v}^i_\varepsilon|^2\le C. \tag{4.2}$$

Пусть, далее, $\underline{v}_\varepsilon(\underline{x},\lambda)$ будет решением задачи (3.6). Тогда, поскольку

$0 \in \overset{\circ}{J}_\varepsilon (\Omega)$, мы имеем $\Phi_\varepsilon(\underline{v}_\varepsilon) \le \Phi_\varepsilon(0) = 0$. Следовательно,

$$\int\limits_\Omega \{2\mu \sum_{k,l=1}^{3} e_{kl}^2[\underline{v}_\varepsilon] + \lambda\langle\rho\underline{v}_\varepsilon, \underline{v}_\varepsilon\rangle\} \, dx$$

$$+\frac{1}{2\lambda} \sum_{i,j=1}^{N_\varepsilon} \langle C_\varepsilon^{ij}[\underline{v}_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - \underline{v}_\varepsilon(x_\varepsilon^j)], \underline{v}_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - \underline{v}_\varepsilon(x_\varepsilon^j)\rangle + \lambda \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} m_\varepsilon^i |\underline{v}_\varepsilon(x_\varepsilon^i)|^2$$

$$\le 2\|\rho\underline{v}_{\varepsilon 0}\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\underline{v}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + 2\big(\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} m_\varepsilon^i |\underline{v}_\varepsilon^i|^2\big)^{\frac{1}{2}} \cdot \big(\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} m_\varepsilon^i |\underline{v}_\varepsilon(x_\varepsilon^i)|^2\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда с помощью второго неравенства Корна

$$\|\underline{v}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \le c\{\int\limits_\Omega \sum_{n,p=1}^{3} \varepsilon_{np}^2[\underline{v}_\varepsilon] \, dx + \int\limits_\Omega |\underline{v}_\varepsilon(\underline{x})|^2 \, dx\} \tag{4.3}$$

и дискретного неравенства Корна (4.1) легко видеть, что

$$\|\underline{v}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\underline{w}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} m_\varepsilon^i |\underline{v}_\varepsilon(x_\varepsilon^i)|^2 \le C. \tag{4.4}$$

Из этого неравенства следует, что множества вектор-функций $\{\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)$, $\varepsilon > 0\}$ и $\{\underline{w}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)$, $\varepsilon > 0\}$ (см. (2.5)) ограничены в $H^1(\Omega)$ и, следовательно, слабо компактны в этом пространстве. Далее, в силу теоремы вложения эти множества компактны в пространстве $L_2(\Omega)$. Теперь мы можем из последовательностей $\{\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda), \varepsilon > 0\}$ и $\{\underline{w}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda), \varepsilon > 0\}$ выделить подпоследовательности, сходящиеся к некоторым вектор-функциям $\underline{v}(\underline{x}, \lambda)$ и $\underline{w}(\underline{x}, \lambda)$, соответственно (слабо в $H^1(\Omega)$ и сильно в $L_2(\Omega)$). Как будет показано далее, пара $\{\underline{v}, \underline{w}\}$ является решением задачи (3.8). Но поскольку эта задача имеет единственное решение, то и сами рассматриваемые последовательности оказываются сходящимися

$$\begin{aligned} &\underline{v}_\varepsilon \rightharpoonup \underline{v} \text{ слабо в } H^1(\Omega),\ \underline{v}_\varepsilon \to \underline{v} \text{ сильно в } L_2(\Omega); \\ &\underline{w}_\varepsilon \rightharpoonup \underline{w} \text{ слабо в } H^1(\Omega),\ \underline{w}_\varepsilon \to \underline{w} \text{ сильно в } L_2(\Omega). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Ясно, что $\underline{v}(\underline{x}) \in \overset{\circ}{J} (\Omega)$, $\underline{w}(\underline{x}) \in H_0^1(\Omega)$. В разделе 5 мы покажем, что пара вектор-функций $\{\underline{v}, \underline{w}\}$ является решением задачи (3.8).

5. Доказательство основного неравенства

Мы покажем, что для любой пары $\{\underline{v}', \underline{w}'\} \in \big(\overset{\circ}{J} (\Omega) \times H_0^1(\Omega)\big)$ имеет место неравенство

$$\Phi_0(\underline{v}, \underline{w}) \le \Phi_0(\underline{v}', \underline{w}'), \tag{5.1}$$

где вектор-функции $\underline{v}(\underline{x})$ и $\underline{w}(\underline{x})$ определены в (4.5). Для начала по заданной паре $\{\underline{v}', \underline{w}'\} \in \left(\overset{\circ}{J}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right) \bigcap C_0^2(\Omega)$ построим специальную вектор-функцию $\underline{v}_{\varepsilon h} \in \overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$ такую, что

$$\lim_{h\to 0} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \Phi_\varepsilon(\underline{v}_{\varepsilon h}) \le \Phi_0(\underline{v}', \underline{w}'). \tag{5.2}$$

Проведем это построение следующим образом. Покроем область Ω кубами $K_h^{x_\alpha}$ с центрами в точках $x_\alpha \in \Omega$ и ребрами длины h, параллельными координатным осям: $\overline{\Omega} \subset \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} K_h^{x_\alpha}$. Пусть центры кубов $x_\alpha \in \Omega$ образовывают кубическую решетку с периодом $h - h^{1+\frac{\gamma}{2}}$, $0 < \gamma < 2$. Обозначим через $K_{h'}^{x_\alpha}$ концентрические к $K_h^{x_\alpha}$ кубы с ребрами длины $h' = h - 2h^{1+\frac{\gamma}{2}}$. Как известно, существуют такие функции $\{\phi_\alpha(\underline{x}) \in C_0^\infty(\Omega)\}_{\alpha\in\Lambda}$ (называемые разбиением единицы), что

$$\phi_\alpha(\underline{x}) = \begin{cases} 1, \underline{x} \in K_{h}^{x_\alpha} \\ 0, \underline{x} \notin K_h^{x_\alpha} \end{cases}, \ 0 \le \phi_\alpha(\underline{x}) \le 1, \ |\nabla\phi_\alpha(\underline{x})| \le \frac{c}{h^{1+\frac{\gamma}{2}}}, \ \sum_{\alpha\in\Lambda} \phi_\alpha(\underline{x}) \equiv 1, \ \underline{x} \in \overline{\Omega}. \tag{5.3}$$

Построим теперь дискретную вектор-функцию

$$\underline{w}_{\varepsilon h}(\underline{x}_\varepsilon^i) = \sum_{\alpha\in\Lambda} \{\underline{w}(\underline{x}_\alpha) + \sum_{n,p=1}^{3} \varepsilon_{np}[\underline{w}(\underline{x}_\alpha)] \underline{v}_\alpha^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i)$$

$$+ \sum_{n,p=1}^{3} w_{np}[\underline{w}(\underline{x}_\alpha)] \underline{\psi}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\alpha)\} \cdot \phi_\alpha(\underline{x}_\varepsilon^i), \tag{5.4}$$

где

$$\varepsilon_{np}[\underline{w}(\underline{x}_\alpha)] = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \underline{w}_n}{\partial x_p}(\underline{x}_\alpha) + \frac{\partial \underline{w}_p}{\partial x_n}(\underline{x}_\alpha)\Big), \quad w_{np}[\underline{w}(\underline{x}_\alpha)] = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \underline{w}_n}{\partial x_p}(\underline{x}_\alpha) - \frac{\partial \underline{w}_p}{\partial x_n}(\underline{x}_\alpha)\Big),$$

вектор-функция $\underline{\psi}^{np}(\underline{x})$ определяется равенством

$$\underline{\psi}^{np}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(x_n \underline{e}^p - x_p \underline{e}^n),$$

а векторы $\underline{v}_\alpha^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i)$ минимизируют функционал $E_{\varepsilon h}^\gamma(\underline{v}, \underline{x}_\alpha, T^{np})$, определенный в (2.1).

Выберем теперь произвольную частицу $Q_\varepsilon^i \subset \Omega$ и рассмотрим граничную задачу

$$\mu\Delta\underline{v}^{ik} = \nabla p, \quad \operatorname{div} \underline{v}^{ik} = 0, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}_3 \setminus Q_\varepsilon^i; \tag{5.5}$$

$$\underline{v}^{ik} = \underline{e}^k + \underline{q}^{ik} \times (\underline{x} - \underline{x}_\varepsilon^i), \quad \underline{x} \in S_\varepsilon^i; \tag{5.6}$$

$$\underline{v}^{ik}(\underline{x}) \xrightarrow[|\underline{x}|\to\infty]{} 0, \quad \underline{v}^{ik}(\underline{x}) \in H^1\big(\mathbb{R}_3 \setminus Q^i_\varepsilon\big). \tag{5.7}$$

Эта задача имеет единственное решение $\big(\underline{v}^{ik}(\underline{x}), \underline{q}^{ik}(\underline{x})\big)$. Будем продолжать это решение на частицу Q^i_ε равенством (5.6). Обозначим, далее, через $B^i_{r\varepsilon}$ и $B^i_{R\varepsilon}$ шары радиусов $2r^\varepsilon_i$ и $\frac{R^i_\varepsilon}{2}$ с общим центром в точке $\underline{x}^i_\varepsilon$. Здесь через R^i_ε обозначено расстояние от частицы Q^i_ε до $\bigcup\limits_{j\neq i} Q^j_\varepsilon \bigcup \partial\Omega$. Как показано в [1], существуют вектор-функции $\underline{\tilde{v}}^i(\underline{x})$ и $\underline{\tilde{v}}^{ik}(\underline{x})$ такие, что

$$\operatorname{rot}\underline{\tilde{v}}^i(\underline{x}) = \underline{v}(\underline{x}^i_\varepsilon) - \underline{v}(\underline{x}),\ \operatorname{div}\underline{\tilde{v}}^i(\underline{x}) = 0,\ \underline{x} \in B^i_{r\varepsilon},\ \langle \underline{\tilde{v}}^i(\underline{x}), \underline{\nu}\rangle = 0 \text{ на } \partial B^i_{r\varepsilon}; \tag{5.8}$$

$$\operatorname{rot}\underline{\tilde{v}}^{ik}(\underline{x}) = \underline{v}^{ik}(\underline{x}),\ \operatorname{div}\underline{\tilde{v}}^{ik}(\underline{x}) = 0,\ \underline{x} \in B^i_{R\varepsilon},\ \langle \underline{\tilde{v}}^{ik}(\underline{x}), \underline{\nu}\rangle = 0 \text{ на } \partial B^i_{R\varepsilon}. \tag{5.9}$$

Для данных вектор-функций $\underline{v}(\underline{x}) \in \overset{\circ}{J}(\Omega) \bigcap C^2_0(\Omega)$ и $\underline{w}(\underline{x}) \in C^2_0(\Omega)$ определим вектор-функцию $\underline{v}_{\varepsilon h}(\underline{x})$ следующим образом:

$$\underline{v}_{\varepsilon h}(\underline{x}) = \underline{v}(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \operatorname{rot}[\underline{\tilde{v}}^i(\underline{x})\varphi^i_{r\varepsilon}(\underline{x})] + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\sum_{k=1}^{3} [w^{\varepsilon h}_k(\underline{x}^i_\varepsilon) - v_k(\underline{x}^i_\varepsilon)] \operatorname{rot}[\underline{\tilde{v}}^{ik}(\underline{x})\varphi^i_{R\varepsilon}(\underline{x})]. \tag{5.10}$$

Здесь
$$\varphi^i_{r\varepsilon}(\underline{x}) = \varphi\Big(\frac{|x - \underline{x}^i_\varepsilon|}{2r^i_\varepsilon}\Big), \quad \varphi^i_{R\varepsilon}(\underline{x}) = \varphi\Big(\frac{2|x - \underline{x}^i_\varepsilon|}{R^i_\varepsilon}\Big).$$

Функция $\varphi(r) \in C^2_0(0,\infty)$ равна 1 при $r < \frac{1}{2}$ и 0 при $r > 1$. Функции $v_k(\underline{x})$ и $w^{\varepsilon h}_k(\underline{x}^i_\varepsilon)$ являются компонентами заданной вектор-функции $\underline{v}(\underline{x})$ и дискретной вектор-функции $\underline{w}^{\varepsilon h}(\underline{x}^i_\varepsilon)$, построенной в (5.4).

Можно показать, что

$$\underline{v}_{\varepsilon h}(\underline{x}) \in H^1_0(\Omega), \quad \operatorname{div}\underline{v}_{\varepsilon h}(\underline{x}) = 0, \quad \underline{x} \in \Omega,$$
$$\underline{v}_{\varepsilon h}(\underline{x}) = \underline{w}^{\varepsilon h}(\underline{x}^i_\varepsilon), \quad \underline{x} \in Q^i_\varepsilon.$$

Итак, $\underline{v}^{\varepsilon h}(\underline{x}) \in \overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$. Будем теперь вычислять действие функционала (3.7) на вектор-функцию $\underline{v}_{\varepsilon h}(\underline{x})$. В работе [1] показано, что

$$\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int\limits_\Omega \big\{2\mu \sum_{k,l=1}^{3} e^2_{kl}[\underline{v}_{\varepsilon h}] + \lambda\langle\rho\underline{v}_{\varepsilon h}, \underline{v}_{\varepsilon h}\rangle - 2\langle\rho\underline{v}_{\varepsilon 0}, \underline{v}_{\varepsilon h}\rangle\big\}\, dx$$

$$= \int\limits_\Omega \big\{2\mu \sum_{k,l=1}^{3} e^2_{kl}[\underline{v}] + \lambda\langle\rho\underline{v}, \underline{v}\rangle + \langle C(\underline{x})[\underline{v} - \underline{w}], \underline{v} - \underline{w}\rangle - 2\langle\rho\underline{v}_0, \underline{v}\rangle\big\}\, dx. \tag{5.11}$$

Здесь функция $C(\underline{x}) = 6\pi\mu\, r(\underline{x})$, а вектор-функция $\underline{v}_0(\underline{x})$ определена в 2.3b).

В работе [3] показано, что

$$\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N_\varepsilon}\langle C_\varepsilon^{ij}[\underline{v}_{\varepsilon h}(\underline{x}_\varepsilon^i)-\underline{v}_{\varepsilon h}(\underline{x}_\varepsilon^j)],\underline{v}_{\varepsilon h}(\underline{x}_\varepsilon^i)-\underline{v}_{\varepsilon h}(\underline{x}_\varepsilon^j)\rangle$$

$$\leq\int_\Omega\sum_{n,p,q,r=1}^{3}a_{npqr}(\underline{x})\cdot\varepsilon_{np}[\underline{w}(\underline{x})]\cdot\varepsilon_{qr}[\underline{w}(\underline{x})]\,dx. \tag{5.12}$$

Покажем теперь, что

$$\lim_{h\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\langle m_\varepsilon^i\underline{v}_\varepsilon^i,\underline{v}_{\varepsilon h}(\underline{x}_\varepsilon^i)\rangle=\int_\Omega\langle\rho_1\underline{w}_0,\underline{w}\rangle\,dx. \tag{5.13}$$

Действительно,

$$\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}m_\varepsilon^i\langle\underline{v}_\varepsilon^i,\underline{v}_{\varepsilon h}(\underline{x}_\varepsilon^i)\rangle=\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}m_\varepsilon^i\langle\underline{w}_0(\underline{x}_\varepsilon^i),\underline{w}(\underline{x}_\varepsilon^i)\rangle+\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}m_\varepsilon^i\langle\underline{w}_{\varepsilon 0}(\underline{x}_\varepsilon^i)-\underline{w}_0(\underline{x}_\varepsilon^i),\underline{w}(\underline{x}_\varepsilon^i)\rangle$$

$$+\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}m_\varepsilon^i\langle\underline{v}_\varepsilon^i,\underline{w}_{\varepsilon h}(\underline{x}_\varepsilon^i)-\underline{w}(\underline{x}_\varepsilon^i)\rangle=I_1+I_2+I_3.$$

В силу условия 2.3а) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}I_2=0$. Слагаемое I_3, с учетом (4.2), не превосходит

$$I_3\leq c\Big(\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}m_\varepsilon^i|\underline{w}_{\varepsilon h}(\underline{x}_\varepsilon^i)-\underline{w}(\underline{x}_\varepsilon^i)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Поскольку $\underline{w}(\underline{x})\in C^2(\Omega)$, имеет место следующее представление:

$$\underline{w}(\underline{x})=\underline{w}(\underline{x}^\alpha)+\sum_{n,p=1}^{3}\big(e_{np}[\underline{w}(\underline{x}^\alpha)]\underline{\varphi}^{np}(\underline{x}-\underline{x}^\alpha)$$
$$+w_{np}[\underline{w}(\underline{x}^\alpha)]\underline{\psi}^{np}(\underline{x}-\underline{x}^\alpha)\big)+\underline{O}(h^2),\quad \underline{x}\in K_h^{x_\alpha}.$$

Отсюда легко видеть, что

$$|\underline{w}_{\varepsilon h}(\underline{x}_\varepsilon^i)-\underline{w}(\underline{x}_\varepsilon^i)|^2\leq C|\underline{v}_\alpha^{np}(\underline{x}_i^{(\varepsilon)})-\underline{\varphi}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i-\underline{x}^\alpha)|^2+O(h^4),\quad \underline{x}_\varepsilon^i\in K_h^{x_\alpha}.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}m_\varepsilon^i|\underline{w}_{\varepsilon h}(\underline{x}_\varepsilon^i)-\underline{w}(\underline{x}_\varepsilon^i)|^2\leq c\sum_{\alpha\in\Lambda}\sum_{i}\sum_{K_h^{x_\alpha}}\varepsilon^3|\underline{v}_\alpha^{np}(\underline{x}_i^{(\varepsilon)})-\underline{\varphi}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i-\underline{x}^\alpha)|^2+O(h^4).$$

Слагаемое
$$\sum_i \sum_{K_h^{x\alpha}} \varepsilon^3 |\underline{v}_\alpha^{np}(\underline{x}_i^{(\varepsilon)}) - \underline{\varphi}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}^\alpha)|^2 = O(h^{5+\gamma})$$
ввиду (2.3) и условия 2.5а). Это, в свою очередь, означает, что $I_3 = O(h^{1+\frac{\gamma}{2}})$ и в пределе при $h \to 0$ дает 0. Далее, ввиду непрерывности вектор-функций $\underline{w}_0(\underline{x})$ и $\underline{w}(\underline{x})$, а также условия 2.4), следует, что
$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_1 = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \rho_{1\varepsilon}(\underline{x}_\varepsilon^i)\langle \underline{w}_0(x_\varepsilon^i), \underline{w}(\underline{x}_\varepsilon^i)\rangle \cdot |Q_\varepsilon^i|$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \rho_{1\varepsilon}(\underline{x})\langle \underline{w}_0(\underline{x}_\varepsilon^i), \underline{w}(\underline{x}_\varepsilon^i)\rangle\, dx = \int_\Omega \langle \rho_1 \underline{w}_0, \underline{w}\rangle\, dx.$$
Итак, справедливость формулы (5.13) установлена.

Аналогичным образом доказывается, что
$$\lim_{h\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \langle m_\varepsilon^i \underline{v}_{\varepsilon h}(x_\varepsilon^i), \underline{v}_{\varepsilon h}(\underline{x}_\varepsilon^i)\rangle = \int_\Omega \langle \rho_1 \underline{w}, \underline{w}\rangle\, dx. \tag{5.14}$$
Сопоставляя теперь (5.11)–(5.14), получаем неравенство (5.2). Далее, из (5.2) и очевидного неравенства $\Phi_\varepsilon(\underline{v}_\varepsilon) \le \Phi_\varepsilon(\underline{v}_{\varepsilon h})$ следует оценка сверху:
$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, \Phi_\varepsilon(\underline{v}_\varepsilon) \le \Phi_0(\underline{v}', \underline{w}'), \quad \forall\{\underline{v}', \underline{w}'\} \in \big(\overset{\circ}{J}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\big). \tag{5.15}$$
Докажем теперь оценку снизу
$$\Phi_0(\underline{v}, \underline{w}) \le \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, \Phi_\varepsilon(\underline{v}_\varepsilon), \tag{5.16}$$
где вектор-функции $\underline{v}(\underline{x})$ и $\underline{w}(\underline{x})$ определены в (4.5).

Сначала будем доказывать это неравенство в предположении гладкости предельных вектор-функций: $\underline{v}(\underline{x}) \in \overset{\circ}{J}(\Omega) \bigcap C_0^2(\Omega)$, $\underline{w}(\underline{x}) \in C_0^2(\Omega)$. Как показано в работе [1],
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \Big\{2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[\underline{v}_\varepsilon] + \lambda\langle \rho \underline{v}_\varepsilon, \underline{v}_\varepsilon\rangle - 2\langle \rho \underline{v}_{\varepsilon 0}, \underline{v}_\varepsilon\rangle\Big\}\, dx$$
$$= \int_\Omega \Big\{2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[\underline{v}] + \lambda\langle \rho \underline{v}, \underline{v}\rangle + \langle C(\underline{x})[\underline{v} - \underline{w}], \underline{v} - \underline{w}\rangle - 2\langle \rho \underline{v}_0, \underline{v}\rangle\Big\}\, dx. \tag{5.17}$$

Из работы [3] имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N_\varepsilon}\langle C_\varepsilon^{ij}[\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i)-\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^j)],\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i)-\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^j)\rangle$$

$$\geq\int_\Omega\sum_{n,p,q,r=1}^{3}a_{npqr}(\underline{x})\cdot\varepsilon_{np}[\underline{w}(\underline{x})]\cdot\varepsilon_{qr}[\underline{w}(\underline{x})]\,dx. \tag{5.18}$$

Далее, аналогично (5.13) и (5.14) устанавливаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\langle m_\varepsilon^i\underline{v}_\varepsilon^i,\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i)\rangle=\int_\Omega\langle\rho_1\underline{w}_0,\underline{w}\rangle\,dx, \tag{5.19}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\langle m_\varepsilon^i\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i),\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i)\rangle=\int_\Omega\langle\rho_1\underline{w},\underline{w}\rangle\,dx. \tag{5.20}$$

Сопоставляя теперь (5.17)–(5.20), получаем неравенство (5.16). Заметим, что эта оценка получена в предположении гладкости предельных вектор-функций $\underline{v}(\underline{x})$ и $\underline{w}(\underline{x})$. Поскольку это заранее неизвестно, необходимо ввести гладкие аппроксимации $\underline{v}_\sigma(\underline{x})$ и $\underline{w}_\sigma(\underline{x})$ этих вектор-функций, для них получить неравенство, аналогичное (5.16), а затем сделать предельный переход по σ (см. [1]). Здесь мы не будем на этом останавливаться.

Неравенство (5.1) следует из (5.15) и (5.16). Теорема 3 доказана.

6. Доказательство теоремы 2

Заметим, что сходимость в теореме 3 доказана только для $\lambda > 0$. Изучая аналитические свойства семейств решений задач (3.1)–(3.5) и (3.10)–(3.12), соответственно, а также их поведение при $|\lambda|\to\infty$, с помощью теоремы Витали удается показать, что при $\mathrm{Re}\lambda>\lambda_0>0$

$$\underline{v}_\varepsilon(\underline{x},\lambda)\rightrightarrows\underline{v}(\underline{x},\lambda)\quad\text{в}\quad L_2(\Omega) \tag{6.1}$$

равномерно по $\lambda = s + i\sigma$.

Так как решения $\underline{v}_\varepsilon(\underline{x},\lambda)$ и $\underline{v}(\underline{x},\lambda)$ задач (3.1)–(3.5) и (3.10)–(3.12) являются преобразованиями Лапласа решений $\underline{\tilde{v}}_\varepsilon(\underline{x},t)$ и $\underline{v}(\underline{x},t)$ задач (1.3)–(1.9) и (2.6)–(2.9), соответственно, мы имеем

$$\underline{\tilde{v}}_\varepsilon(\underline{x},t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{2\lambda_0-i\infty}^{2\lambda_0+i\infty}e^{\lambda t}\underline{v}_\varepsilon(\underline{x},\lambda)\,d\lambda,\quad \underline{v}(\underline{x},t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{2\lambda_0-i\infty}^{2\lambda_0+i\infty}e^{\lambda t}\underline{v}(\underline{x},\lambda)\,d\lambda. \tag{6.2}$$

Обозначим через $\underline{\psi}(\underline{x})$ пробную вектор-функцию класса $L_2(\Omega)$, а через $\varphi(t)$ — пробную функцию класса $C_0^1(0,T)$. Покажем теперь, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_\Omega \langle \underline{\tilde{v}}_\varepsilon(\underline{x},t)-\underline{v}(\underline{x},t),\underline{\psi}(\underline{x})\varphi(t)\rangle\,dx\,dt=0,\ \forall T>0. \tag{6.3}$$

Действительно, используя (6.2) и условие $\varphi(t)\in C_0^1(0,T)$ (из этого условия следует, что

$$\int_0^T e^{\lambda t}\varphi(t)\,dt=O\big(\frac{1}{|\lambda|}\big)), \tag{6.4}$$

получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big|\int_0^T\int_\Omega \langle \underline{\tilde{v}}_\varepsilon(\underline{x},t)-\underline{v}(\underline{x},t),\underline{\psi}(\underline{x})\varphi(t)\rangle\,dx\,dt\Big|$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\Big|\int_0^T\int_\Omega\langle\frac{1}{2\pi i}\int_{2\lambda_0-i\infty}^{2\lambda_0+i\infty} e^{\lambda t}\big(\underline{v}_\varepsilon(\underline{x},\lambda)-\underline{v}(\underline{x},\lambda)\big)\,d\lambda,\underline{\psi}(\underline{x})\varphi(t)\rangle\,dx\,dt\Big|$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\Big|\int_{2\lambda_0-i\infty}^{2\lambda_0+i\infty}d\lambda\int_\Omega\langle\big(\underline{v}_\varepsilon(\underline{x},\lambda)-\underline{v}(\underline{x},\lambda)\big),\underline{\psi}(\underline{x})\rangle\,dx\cdot\int_0^T e^{\lambda t}\varphi(t)\,dt\Big|$$

$$\le c\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\|\underline{v}_\varepsilon(\underline{x},2\lambda_0+i\sigma)-\underline{v}(\underline{x},2\lambda_0+i\sigma)\|_{L_2(\Omega)}\,\frac{d\sigma}{\sigma}$$

$$=c\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_{-p}^{p}\|\underline{v}_\varepsilon(\underline{x},2\lambda_0+i\sigma)-\underline{v}(\underline{x},2\lambda_0+i\sigma)\|_{L_2(\Omega)}\,\frac{d\sigma}{\sigma}$$

$$+\int_{-\infty}^{-p}\|\underline{v}_\varepsilon(\underline{x},2\lambda_0+i\sigma)-\underline{v}(\underline{x},2\lambda_0+i\sigma)\|_{L_2(\Omega)}\,\frac{d\sigma}{\sigma}$$

$$+\int_{p}^{+\infty}\|\underline{v}_\varepsilon(\underline{x},2\lambda_0+i\sigma)-\underline{v}(\underline{x},2\lambda_0+i\sigma)\|_{L_2(\Omega)}\,\frac{d\sigma}{\sigma}\Big). \tag{6.5}$$

Нетрудно показать, что вдоль прямой $\mathrm{Re}\lambda=2\lambda_0$ при $|\lambda|\to\infty$ выполняются оценки

$$\|\underline{v}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \le \frac{C_\varepsilon}{|\lambda|}, \quad \|\underline{v}\|_{L_2(\Omega)} \le \frac{C}{|\lambda|}.$$

Отсюда следует, что последние два интеграла по σ в (6.5) малы равномерно по ε для достаточно больших p. Первый интеграл по σ исчезает при $\varepsilon \to 0$ в силу (6.1). Итак, формула (6.3) установлена.

Утверждение теоремы 2 следует из того, что множество вектор-функций $\big\{\sum\limits_i \psi_{\mathbf{i}}(\mathbf{x})\varphi_i(t),\ \psi_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}) \in L_2(\Omega),\ \varphi_i(t) \in C_0^1(0,T)\big\}$ плотно в $L_2(\Omega \times [0,T])$.

7. Коэффициенты упругости в случае периодического расположения частиц в жидкости

Проверка условий 2.1)–2.4) и 2.5b), о которых мы говорили в разд. 2, не вызывает каких-либо затруднений. Особого внимания заслуживает проверка условия 2.5a). Это делается в каждом конкретном случае расположения частиц в жидкости. Например, для периодического случая, когда взаимодействие между частицами осуществляется только по ребрам (длины ε) куба, его диагоналям и диагоналям его граней, а $k^{ij} = k$ (см. (1.2)), пределы 2.5a) существуют. При этом тензор $a_{npqr}(\underline{x})$ оказывается ортотропным, и его компоненты определяются формулами $a_{nnnn} = k(1+\sqrt{2}+\frac{4}{9}\sqrt{3})$, $a_{nnpp} = a_{npnp} = k(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{4}{9}\sqrt{3})$, $n,p = \overline{1,3}$, $a_{npqr} = 0$ во всех остальных случаях.

В заключение автор выражает признательность Е.Я. Хруслову за интерес к работе и полезные замечания.

Список литературы

[1] *L.V. Berlyand and E.Ya. Khruslov*, Rheology of viscous Newtonian fluid with small interacting particles. Penn State Preprint (2003).

[2] *L.V. Berlyand and E.Ya. Khruslov*, Homogenized non-Newtonian viscoelastic rheology of a suspension of interacting particles in a viscous Newtonian fluid. — SIAM, *J. Appl. Math.* (2004), v. 64, No. 3, p. 1002–1034.

[3] *M.A. Berezhnyy and L.V. Berlyand*, Continuum limit for three-dimensional mass-spring networks and discrete Korn's inequality. — SIAM, *J. Mech. Phys. Solids.* (Submitted)

Small oscillations of viscous incompressible fluid with small solid interacting particles which have a large density

M.A. Berezhny

The motion of viscous incompressible fluid with large number of small solid ball-shaped interacting particles, which have a large density, is considered. The asymptotic behaviour of small oscillations of such a system is studied, when radii of the particles, distances between the nearest particles and interaction power between them are accordingly decreased but the density of particles' substance is accordingly increased. The equations, which describe the homogenized model of such a system, are derived.