Математическая физика, анализ, геометрия
2005, т. 12, № 2, с. 148–157

Базисы из подмножеств собственных функций двух разрывных дифференциальных операторов

С.Г. Велиев

Институт математики и механики НАН Азербайджана
ул. Ф. Агаева, 9, Баку, AZ 1602, Азербайджан
E-mail:rmi@lan.ab.az

Статья поступила в редакцию 10 октября 2004 г.
Представлена Ф.С. Рофе-Бекетовым

Работа посвящена изучению базисных свойств систем экспонент с вырождающимися коэффициентами, частные виды которых являются объединением подмножеств собственных функций двух разрывных дифференциальных операторов. Установлено необходимое и достаточное условие полноты и минимальности, доказана базисность (базисность Рисса в L_2) этих систем в L_p при определенных условиях на коэффициенты.

Працю присвячено вивченню базисних властивостей систем експонент з виродними коефіцієнтами, окремі форми яких є об'єднанням підмножин власних функцій двох розривних диференціальних операторів. Встановлено необхідну та достатню умову повноти та мінімальності, доведено базисність (базисність Рисса в L_2) цих систем в L_p за певних умов на коефіцієнти.

1. Введение

Изучение базисных свойств собственных и присоединенных функций различных дифференциальных операторов в требуемых банаховых пространствах является важным этапом при решении многих задач математической физики и механики. Учитывая, что подобные вопросы относительно разрывных дифференциальных операторов недостаточно изучены, рассмотрение конкретных или модельных случаев представляет особый интерес в связи с подходом к решению подобных задач. В качестве примера можно рассмотреть следующие разрывные дифференциальные операторы первого порядка:

$$L^{\pm}u \equiv u'(t) - \sum_{i=1}^{l^{\pm}} ctg\left(t - \tau_i^{\pm}\right) u(t)$$

Mathematics Subject Classification 2000: 47E05.

на $G^{\pm} \equiv \bigcup_{i=1}^{l^{\pm}+1} \left(\tau_{i-1}^{\pm}, \tau_i^{\pm}\right)$, где $-\pi = \tau_0^{\pm} < \tau_1^{\pm} < \cdots < \tau_{l^{\pm}}^{\pm} < \tau_{l^{\pm}+1}^{\pm} = \pi$.

Следуя В.А. Ильину [1], будем исходить из обобщенной трактовки собственных функций оператора $L^{\pm}$, допускающей рассмотрение совершенно произвольных краевых условий. То есть под собственной функцией оператора $L^{\pm}$, отвечающей собственному значению λ, понимается любая ненулевая, кусочно-непрерывная функция с точками разрывов $\left\{\tau_i^{\pm}\right\}_1^{l^{\pm}}$, соответственно, которая абсолютно непрерывна на $G^{\pm}$ и удовлетворяет п.в. на $(-\pi, \pi)$ уравнению $L^{\pm}u = \lambda u$.

Поступая аналогично работе В.А. Ильина и Е.И. Моисеева [2], т.е. беря "половины"множеств собственных функций операторов L^{+} и L^{-}, отвечающих собственным значениям $\lambda_n = in$, имеем систему

$$\left\{\prod_{j=1}^{l^{+}} \sin\left(t - \tau_j^{+}\right) e^{int}; \prod_{j=1}^{l^{-}} \sin\left(t - \tau_j^{-}\right) e^{-i(n+1)t};\right\}_{n \geq 0}.$$

Эта система отличается от классической системы экспонент $\left\{e^{int}\right\}_{-\infty}^{+\infty}$ не только коэффициентами, но и наличием вырождения в некоторых точках $(-\pi, \pi)$. В связи с этим исследование базисных свойств подобных систем представляет определенные трудности.

В предлагаемой работе будем рассматривать более общую систему

$$\left\{A^{+}(t) \cdot \omega^{+}(t) \cdot e^{int}; A^{-}(t) \cdot \omega^{-}(t) \cdot e^{-ikt}\right\}_{n \geq 0, k \geq 1} \tag{1}$$

с комплекснозначными коэффициентами $A^{\pm}(t) \equiv \left|A^{\pm}(t)\right| \cdot e^{i\alpha^{\pm}(t)}$ на $[-\pi, \pi]$ и вырождениями $\omega^{\pm}(t)$ вида

$$\omega^{\pm}(t) \equiv \prod_{i=1}^{l} \left\{\sin\left|\frac{t - \tau_i^{\pm}}{2}\right|\right\}^{\beta_i^{\pm}}, \tag{2}$$

где $\left\{\tau_i^{\pm}\right\}_1^{l^{\pm}} \subset (-\pi, \pi)$; $\left\{\beta_i^{\pm}\right\} \subset R$ — множества действительных чисел.

Отметим, что близкие вопросы, касающиеся данной тематики, ранее рассмотрены в работах В.Ф. Гапошкина [3], К.С. Казаряна и П.И. Лизоркина [4] и Е.И. Моисеева [5, 6]. Случай, когда отсутствуют вырождения в (1), базисность в L_p ранее рассмотрена в работах Б.Т. Билалова [7, 8].

2. Основные предположения

Будем предполагать, что функции $A^{\pm}(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

a) $|A^{\pm}(t)|$ измеримы на $(-\pi, \pi)$, причем имеет место $\left\| |A^{+}|^{\pm 1}; |A^{-}|^{\pm 1} \right\|_{\infty} < +\infty$, где $\|\cdot\|_{\infty}$ — норма в L_{∞}.

b) $\alpha^{\pm}(t)$ — кусочно-гельдеревы функции на $[-\pi, \pi]$; $\{s_i\}_1^r \subset (-\pi, \pi)$ — множество точек разрывов функции $\theta(t) \equiv \alpha^{+}(t) - \alpha^{-}(t)$. Обозначим $\{h_i\}_1^r$ — скачки фнкции $\theta(t)$ в точках s_i:

$$h_i = \theta(s_i + 0) - \theta(s_i - 0) \ , \ \ i = \overline{1, r}.$$

Не ограничивая общности, в дальнейшем будем считать, что функция $\theta(t)$ непрерывна слева на $(-\pi, \pi)$ и $\theta(-\pi) = \theta(-\pi + 0)$.

Введем необходимые в дальнейшем обозначения. Пусть $S \equiv \{s_i\}_1^r$; $T^{\pm} \equiv \left\{\tau_i^{\pm}\right\}_1^{l^{\pm}}$. Переобозначим: $\{\sigma_i\}_1^l \equiv S \cup T^{-} \cup T^{+}$. Образуем соответствие: $\tau_i^{\pm} \to \beta_i^{\pm}$ и $s_k \to \dfrac{h_k}{2\pi}$. Определим

$$\lambda_i^{\pm} = \mp \begin{cases} \frac{\beta_k^{\pm}}{2} \ , & \{\sigma_i\} \cap T^{\pm} = \tau_k^{\pm} \ , \\ 0, & \{\sigma_i\} \cap T^{\pm} = \emptyset, \end{cases} \tag{3}$$

$$\lambda_i = \begin{cases} -\frac{h_k}{2\pi} \ , & \{\sigma_i\} \cap S = s_k \ , \\ 0, & \{\sigma_i\} \cap S = \emptyset, \end{cases} \tag{4}$$

$$v_i^{\pm} = \pm\lambda_i^{+} + \lambda_i^{-} \pm \lambda_i \ , \qquad i = \overline{1, l} \ , \tag{5}$$

где $\{\sigma_i\}$ — одноточечное множество.

Не ограничивая общности, будем считать, что $-\pi < s_1 < \cdots < s_r < \pi$. Целые числа n_i, $i = \overline{1, r}$, определим из следующих неравенств:

$$\begin{gathered} -\frac{1}{q} < \frac{h_i}{2\pi} + n_{i-1} - n_i \leq \frac{1}{p} \ , \ \ i = \overline{1, r} \ ; \ \ n_0 = 0, \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{gathered} \tag{6}$$

Обозначим

$$\omega = \theta(-\pi + 0) - \theta(\pi - 0) + 2\pi \cdot n_r. \tag{7}$$

3. Основные результаты

Сформулируем основные теоремы данной работы.

Теорема 1. *Пусть для функции $A^{\pm}(t)$ имеют места условия a), b); числа $v_i^{\pm}$, $i = \overline{1, l}$, определены из (3)–(5). Если выполнены условия*

$$-\frac{1}{p} < \beta_i^{\pm} < \frac{1}{q} \, , \quad i = \overline{1, l^{\pm}}; \quad -\frac{1}{p} < v_k^{\pm} < \frac{1}{q} \, , \quad k = \overline{1, l^{\pm}},$$

$$-\frac{1}{p} < \frac{h_0}{2\pi} < \frac{1}{q}, \quad h_0 = \theta(-\pi + 0) - \theta(\pi - 0),$$

то система (1) образует базис в L_p, $1 < p < +\infty$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия a), b) и имеет место* $-\frac{1}{p} < \beta_i^{\pm} < \frac{1}{q}$, $i = \overline{1, l^{\pm}}$; n_r *и* ω *определены из (6) и (7). Тогда система (1) полна в* L_p *в том и только в том случае, если* $\omega \leq \frac{2\pi}{p}$; *минимальна в* L_p *тогда и только тогда, когда* $\omega > -\frac{2\pi}{q}$, *если* $\left\{\sigma_i^{\pm}\right\} \cap \{s_i\}_1^r = \{\emptyset\}$ *и* $1 < p < +\infty$.

В L_2 имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть выполнены условия a), b) и, кроме того,*

$$\sigma_i^+ = \sigma_i^- = \sigma_i, \quad \beta_i^+ = \beta_i^- = \beta_i, \quad i = \overline{1, l}; \quad \{\sigma_i\} \cap \{s_i\}_1^r = \{\emptyset\}.$$

При ограничениях

$$-\frac{1}{2} < \beta_i < \frac{1}{2}, \quad i = \overline{1, l}; \quad -\pi < h_k < \pi, \quad k = \overline{1, r+1}; \quad h_{r+1} = \omega,$$

система (1) образует базис Рисса в L_2 *в том и только в том случае, если* $\beta_i = 0$, $i = \overline{1, l}$.

Д о к а з а т е л ь с т в а т е о р е м 1, 2 частично приведены в работах автора [11–12]. Поэтому приведем краткие схемы этих доказательств.

Пусть H_δ^+, $\delta > 0$ — обычный класс Харди аналитических функций в единичном круге. Введем следующий весовой класс Харди H_{p,v^+}^+:

$$H_{p,v^+}^+ \stackrel{def}{=} \left\{ f \in H_1^+ : \int_{-\pi}^{\pi} \left| f^+\left(e^{it}\right) \right|^p v^+(t) dt < +\infty \right\},$$

где $v^+ \geq 0$ — п.в. измеримая функция, $f^+(\tau)$ — некасательные граничные значения функции $f(z)$ в точке τ, $|\tau| = 1$. Аналогично вводится класс H_{p,v^-}^-. Отметим, что ранее подобные классы введены в работах А.П. Солдатова (см., напр., [9]). Пусть

$$v^{\pm} \equiv \left[\omega^{\pm}\right]^p, \qquad G(e^{it}) \equiv \frac{\omega^-(t) A^-(t)}{\omega^+(t) A^+(t)}.$$

Рассмотрим следующую задачу сопряжения в классах $H_{p,v^{\pm}}^{\pm}$:

$$\begin{cases} F^+(\tau) + G(\tau) F^-(\tau) = g(\arg \tau), \ |\tau| = 1, \\ F^-(-\infty) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Под решением задачи сопряжения (8) в классах $H^{\pm}_{p,v^{\pm}}$ понимается любая пара функций $\{F^+; F^-\} : F^{\pm} \in H^{\pm}_{p,v^{\pm}}$, граничные значения $F^{\pm}(\tau)$ которых на единичной окружности удовлетворяют равенствам (8) п.в. и F^- на бесконечности обращается в нуль. Общее решение задачи (8) имеет вид

$$F(z) = F_1(z) + F_0(z),$$

где $F_1(z)$ — общее решение соответствующей однородной задачи

$$F_1^+(\tau) + G(\tau) F_1^-(\tau) = 0, \ |\tau| = 1, \tag{9}$$

$F_0(z)$ — какое-нибудь частное решение задачи (8). Определим следующие аналитические функции внутри и вне единичного круга:

$$X_1^{\pm}(z) = \exp\left\{ \pm \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{\omega^-(t)}{\omega^+(t)} \cdot \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} dt \right\},$$

$$X_2^{\pm}(z) = \exp\left\{ \pm \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| \frac{A^-(t)}{A^+(t)} \right| \cdot \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} dt \right\},$$

$$X_3^{\pm}(z) = \exp\left\{ \pm \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(t) \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} dt \right\}.$$

Пусть

$$Z_i(z) \equiv \begin{cases} X_i^+(z), \ |z| < 1, \\ \left[X_i^-(z)\right]^{-1}, \ \ |z| > 1, \ \ i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Формально функцию $Z(z) \equiv \prod\limits_{i=1}^{3} Z_i(z)$ будем называть каноническом решением однородной задачи (9).

Далее, доказательства теорем 1, 2 опираются на использование следующей леммы.

Лемма. *Общее решение однородной задачи (9) в классах* $H^{\pm}_{p,v^{\pm}}$, $1 < p < +\infty$, *которое на бесконечности имеет порядок* $\leq m$, *представимо в виде* $F_1(z) = Z(z) \cdot P_m(z)$, *если выполнены все условия теоремы 3, где* P_m — *полином степени* $\leq m$.

Изложим подробнее доказательство теоремы 3. Предварительно рассмотрим систему экспонент

$$\left\{ A^+(t) \cdot e^{int} \ ; \ A^-(t) \cdot e^{-ikt} \right\}_{n \geq 0 \ , \ \ k \geq 1}. \tag{10}$$

Из условий теоремы 3 и результатов работы Б.Т. Билалова [7] следует, что система (10) образует базис Рисса в пространстве L_2. Обозначим через $\left\{e_n^+(t); e_k^-(t)\right\}_{n\geq 0, k\geq 1}$ биортогональную к (10) систему, т.е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} A^+(t)e^{int}\overline{e_m^+(t)}dt = \delta_{nm},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} A^+(t)e^{int}\overline{e_m^-(t)}dt = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} A^-(t)e^{-int}\overline{e_m^-(t)}dt = \delta_{nm},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} A^-(t)e^{-int}\overline{e_m^+(t)}dt = 0,$$

где δ_{nm} — символ Кронекера.

Из результатов работы [7] следует, что функции $e_n^\pm(t)$ удовлетворяют условиям $|e_n^\pm(t)| \geq \delta > 0$ почти всюду в достаточно малых окрестностях точек τ_i, $i = \overline{1,l}$. Поэтому система (1) минимальна в пространстве L_2 и биортогональная к ней система имеет вид

$$H_n^+(t) \equiv \frac{e_n^+(t)}{\omega(t)}, \quad n \geq 0; \quad H_k^-(t) \equiv \frac{e_k^-(t)}{\omega(t)}, \quad k \geq 1.$$

А теперь предположим, что существует номер $i_0 \in \{1, \ldots, l\}$, для которого $\beta_{i_0} > 0$. Тогда нетрудно заметить, что существует такая функция $f(t)$ из пространства L_2, для которой отношение $\frac{f(t)}{\omega(t)}$ не принадлежит пространству L_2. Обозначим через $\left\{a_n^+; a_k^-\right\}_{n\geq 0, k\geq 1}$ биортогональные коэффициенты функции $F(t) \equiv \frac{f(t)}{\omega(t)}$ по системе (10). Тогда из базисности Рисса системы (10) в пространстве L_2 следует, что ряд

$$\sum_n \left(\left|a_n^+\right|^2 + \left|a_n^-\right|^2\right) = +\infty$$

расходится. С другой стороны, $\{a_n^\pm\}$ являются биортогональными коэффициентами функции $f(t)$ по системе (1)

$$a_n^\pm = \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cdot \overline{e_n^\pm(t)}dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{H_n^\pm(t)}dt.$$

Таким образом, в результате получаем, что в этом случае система (1) по определению не является бесселевой и, значит, не является базисом Рисса в пространстве L_2.

А теперь пусть ряд

$$\sum_n \left(\left| a_n^+ \right|^2 + \left| a_n^- \right|^2 \right) < +\infty$$

сходится для некоторой последовательности чисел $\left\{ a_n^+ ; a_{n+1}^- \right\}_{n \geq 0}$. Так как система (10) образует базис Рисса в пространстве L_2, то очевидно, что существует такая функция $F(t)$ пространства L_2, для которой последовательность чисел $\{a_n^{\pm}\}$ является биортогональными коэффициентами этой функции по системе (10)

$$a_n^{\pm} = \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cdot \overline{e_n^{\pm}(t)} dt.$$

Обозначая произведение $F(t) \cdot \omega(t)$ через $f(t)$, имеем

$$a_n^{\pm} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \overline{H_n^{\pm}(t)} dt.$$

Совершенно очевидно, что если $\beta_i \geq 0$, $\forall i = \overline{1, l}$, то функция $f(t)$ принадлежит пространству L_2. Из выражения $H_n^{\pm}(t) \equiv \frac{e_n^{\pm}(t)}{\omega(t)}$ следует, что система $\left\{ H_n^+(t); H_{n+1}^-(t) \right\}_{n \geq 0}$ принадлежит пространству L_2.

А теперь покажем, что существует единственная такая функция. Из условий теоремы 3 следует, что функция $[\omega(t)]^{-1}$ принадлежит пространству L_2. Предположим, что существует другая функция $f_0(t)$ из L_2, для которой

$$a_n^{\pm} = \int_{-\pi}^{\pi} f_0(t) \overline{H_n^{\pm}(t)} dt = \int_{-\pi}^{\pi} F_0(t) \overline{e_n^{\pm}(t)} dt,$$

где $F_0(t) \equiv \frac{f_0(t)}{\omega(t)}$. Очевидно, что эта функция принадлежит пространству $L_1 \in (-\pi, \pi)$. Из базисности Рисса (10) в L_2 следует, что биортогональная к ней система $\left\{ e_n^+(t); e_{n+1}^-(t) \right\}_{n \geq 0}$ полна в L_2 и в результате полна и в $L_1 \equiv L_1(-\pi, \pi)$. Из предыдущих выражений имеем

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \left[F(t) - F_0(t) \right] \overline{e_n^{\pm}(t)} dt, \quad \forall n.$$

Таким образом, из этого соотношения имеем, что $F(t) = F_0(t)$ и заодно $f(t) = f_0(t)$.

В результате по определению получаем, что при выполнении условий $\beta_i \geq 0$, $\forall i = \overline{1,l}$, система (1) образует базис Гильберта в L_2.

А теперь рассмотрим случай, когда $\beta_{i_0} < 0$ для некоторого номера $i_0 \in \{1,\ldots,l\}$. Тогда нетрудно убедиться в том, что существует такая функция $F(t)$ из пространства L_2, для которой произведение $F(t)\cdot\omega(t)$ не принадлежит пространству L_2. Пусть $\{a_n^{\pm}\}$ — биортогональные коэффициенты функции $F(t)$ по системе (10):

$$a_n^{\pm} = \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cdot \overline{e_n^{\pm}(t)}dt.$$

Из базисности Рисса системы (10) в L_2 следует, что ряд

$$\sum_n \left(\left|a_n^+\right|^2 + \left|a_n^-\right|^2\right) < +\infty$$

сходится. Обозначая произведение $F(t)\cdot\omega(t)$ через $f(t)$, получаем, что $\{a_n^{\pm}\}$ являются биортогональными коэффициентами этой функции по системе (1):

$$a_n^{\pm} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \overline{H_n^{\pm}(t)}dt.$$

Опять же из полноты системы $\left\{e_n^+; e_{n+1}^-\right\}_{n\geq 0}$ в пространстве суммируемых по Лебегу функций L_1 и принадлежности функции $f(x)$ этому пространству получаем, что такая функция $f(x)$ единственна. В итоге имеем, что в рассмотренном случае система (1) не является системой Гильберта и, таким образом, не образует базис Рисса в L_2. На самом деле, можно взять функцию $F(t)$ таким образом, чтобы произведение $F(t)\cdot\omega(t)$ принадлежало пространству $L_{2-\delta}$ для некоторого $\delta > 0$, где $2-\delta > 1$. Далее, по результатам работы Н.К. Бари [10], сопряженная система к базису Гильберта является базисом Бесселя, следовательно, $\{H_n^{\pm}\}$ полна в пространстве L_2 и, значит, полна в $L_{2-\delta}$. Поэтому для таким образом взятой последовательности $\{a_n^{\pm}\}$ из l_2 не существует функция из пространства L_2 такая, чтобы $\{a_n^{\pm}\}$ являлись биортогональными коэффициентами этой функции по системе (1).

Для полноты рассматриваемых случаев пусть $\beta_i \leq 0$, $\forall i$. Возьмем любую функцию $f(t)$ из пространства L_2. Совершенно очевидно, что отношение $\dfrac{f(t)}{\omega(t)} \equiv F(t)$ принадлежит L_2. Из базисности Рисса системы (10) в пространстве L_2 следует, что

$$\sum_n \left(\left|a_n^+\right|^2 + \left|a_n^-\right|^2\right) < +\infty,$$

где $\{a_n^{\pm}\}$ — биортогональные коэффициенты функции $F(t)$ по системе (10):

$$a_n^{\pm} = \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cdot \overline{H_n^{\pm}(t)} dt.$$

С другой стороны, $\{a_n^{\pm}\}$ являются биортогональными коэффициентами функции $f(t)$ по системе (1). Следовательно, в этом случае система (1) образует базис Бесселя в пространстве L_2. Теорема доказана.

Наряду с этой теоремой мы заодно доказали следующие утверждения.

Утверждение 1. *Пусть функции $A^{\pm}(t)$ и $\omega(t)$ удовлетворяют условиям a) и b); имеет место*

$$-\pi < h_k < \pi, \quad k = \overline{1, r+1};$$

$$|\beta_i| < \frac{1}{2}, \quad i = \overline{1, l},$$

где $h_{r+1} = \theta(-\pi + 0) - \theta(\pi - 0)$. Система (1) образует базис Гильберта в пространстве L_2 тогда и только тогда, когда $\beta_i \geq 0$, $\forall i$.

Утверждение 2. *Пусть выполняются все условия утверждения 1. Система (1) образует базис Бесселя в L_2 тогда и только тогда, когда $\beta_i \leq 0$, $\forall i$.*

Автор выражает глубокую благодарность акад. М.Г. Гасымову за проявленное внимание к работе.

Список литературы

[1] *В.А. Ильин*, О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка. — *Докл. АН СССР* (1983), т. 273, № 5, с. 1048–1053.

[2] *В.А. Ильин, Е.И. Моисеев*, О системах, состоящих из подмножеств корневых функций двух различных краевых задач. — *Тр. мат. ин-та РАН* (1992), т. 201, с. 219–230.

[3] *В.Ф. Гапошкин*, Одно обобщение теоремы М. Рисса о сопряженных функциях. — *Мат. сб.* (1958), т. 46(88), № 3, с. 359–372.

[4] *К.С. Казарян, П.И. Лизоркин*, Мультипликаторы, базисы, безусловные базисы в весовых пространствах B и SB. — *Тр. мат. ин-та АН СССР* (1989), т. 187, с. 98–115.

[5] *Е.И. Моисеев*, О базисности систем синусов и косинусов в весовом пространстве. — *Диф. ур.* (1998), т. 34, № 1, с. 40–44.

[6] *Е.И. Моисеев*, Базисное свойство системы собственных функций дифференциального оператора в весовом пространстве. — *Диф. ур.* (1999), т. 35, № 2, с. 200–205.

[7] *Б.Т. Билалов*, Базисность некоторых систем экспонент, косинусов и синусов. — *Диф. ур.* (1990), т. 26, № 1, с. 10–16.

[8] *Б.Т. Билалов*, Базисные свойства некоторых систем экспонент и степеней со сдвигом. — *Докл. РАН* (1994), т. 334, № 4, с. 416–419.

[9] *А.П. Солдатов*, Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. Высш. школа, Москва (1991).

[10] *Н.К. Бари*, Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве. — *Уч. зап. МГУ* (1951), т. 34, вып. 148, с. 69–107.

[11] *С.Г. Велиев*, Об одной системе функций. — *Изв. Бакинск. ун-та. Сер. физ.-мат. наук* (2003), № 4, с. 70–78.

[12] *С.Г. Велиев*, Полнота некоторой системы экспонент с вырождением в L_p, $1 < p < +\infty$. — *Тр. ИММ НАН Азербайджана* (2003), т. XVIII, с. 141–146.

Bases from eigenfunctions subsets of two discontinuous differential operators

S.G. Veliev

The work is devoted to the study of basic properties of exponent systems with the degenerate coefficients, special types of which are the combination of eigenfunctions subsets of two discontinuous differential operators. Necessary and sufficient condition of completeness and minimality was assigned, and under certain conditions on the coefficients the basis property of these systems in L_p was proved (Riss basis in L_2).