Математическая физика, анализ, геометрия
2005, т. 12, № 2, с. 158–172

О связи аппроксимации нелинейных систем в смысле быстродействия и их алгебраической аппроксимации

С.Ю. Игнатович

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина
E-mail:ignatovich@ukr.net

Статья поступила в редакцию 16 июня 2004 г.
Представлена В.И. Коробовым

Рассматривается вопрос о связи асимптотического поведения решения задачи быстродействия и свойств алгебры нелинейных степенных моментов. А именно, показано, что если некоторая min-проблема моментов аппроксимирует задачу быстродействия для нелинейной системы, то при некоторых дополнительных предположениях структуры, порождаемые в алгебре этой проблемой моментов и нелинейной системой, совпадают.

Розглядається питання про зв'язок асимптотичної поведінки розв'язку задачі швидкодії та властивостей алгебри нелінійних степеневих моментів. А саме, показано, що якщо деяка min-проблема моментів апроксимує задачу швидкодії для нелінійної системи, то при деяких додаткових припущеннях структури, які породжені в алгебрі цією проблемою моментів та нелінійною системою, співпадають.

1. Введение и предварительные сведения

В нелинейной теории управления важное место занимает задача аппроксимации нелинейных систем. В ряде случаев для заданной нелинейной системы удается подобрать систему более простого вида, траектории которой в некотором смысле близки к траекториям исходной системы. Например, если аппроксимирующая система является линейной, становится возможным эффективно находить приближенные решения многих нелинейных задач оптимального управления.

Mathematics Subject Classification 2000: 93B10, 93B25.

© С.Ю. Игнатович, 2005

В работах [1, 2] предложен подход к аппроксимации нелинейных систем в окрестности точки покоя в смысле задачи быстродействия. Точнее, рассмотрим нелинейную систему вида

$$\dot{x} = a(t,x) + ub(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^1, \qquad a(t,0) \equiv 0, \tag{1}$$

где $a(t,x)$, $b(t,x)$ — аналитические вектор-функции в окрестности нуля в $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда при достаточно малых θ определено отображение $x^0 = S(\theta, u)$, сопоставляющее управлению $u(t)$ начальную точку $x(0) = x^0$, которую это управление переводит в нуль за время θ. Это отображение представлено в виде ряда нелинейных степенных моментов [1, 2]

$$S(\theta,u) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{k\geq 1, m_i \geq 0 \\ m_1+\cdots+m_k+k=m}} v_{m_1\ldots m_k} \xi_{m_1\ldots m_k}(\theta,u), \tag{2}$$

где нелинейные степенные моменты $\xi_{m_1,\ldots,m_k}(\theta,u)$ имеют вид

$$\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta,u) = \int\limits_0^{\theta} \int\limits_0^{\tau_1} \cdots \int\limits_0^{\tau_{k-1}} \tau_1^{m_1} \tau_2^{m_2} \cdots \tau_k^{m_k} \prod_{j=1}^{k} u(\tau_j)\, d\tau_k \cdots d\tau_2 d\tau_1, \tag{3}$$

а $v_{m_1\ldots m_k}$ — постоянные векторные коэффициенты такие, что $\|v_{m_1\ldots m_k}\| \leq k! C_1 C^{m_1+\cdots+m_k+k}$ [3]. Кроме того, набор векторных коэффициентов $v_{m_1\ldots m_k}$ удовлетворяет некоторым дополнительным соотношениям, алгебраическое описание которых приведено ниже. Итак, при достаточно малых θ ряд (2) абсолютно сходится при любом управлении $u(t)$ таком, что $|u(t)| \leq 1$ при $t \in [0,\theta]$ почти всюду.

Таким образом, задача быстродействия для системы (1) равносильна следующей *min-проблеме моментов*, в линейном варианте предложенной и изученной в [4]: для заданной точки s из некоторой окрестности нуля найти минимально возможное θ_s и соответствующее управление $u_s(t)$, $|u_s(t)| \leq 1$ такие, что при $\theta = \theta_s$ и $u(t) = u_s(t)$ имеет место равенство

$$s = S(\theta, u).$$

В дальнейшем мы будем отождествлять задачу быстродействия и соответствующую ей min-проблему моментов.

Заметим, что

$$\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta,u) = \theta^{m_1+\cdots+m_k+k} \xi_{m_1\ldots m_k}(1,\hat{u}),$$

где $\hat{u}(t) = u(t\theta)$, $t \in [0,1]$. Это равенство означает, что число

$$\mathrm{ord}(\xi_{m_1\ldots m_k}) = m_1 + \cdots + m_k + k \tag{4}$$

описывает "асимптотический порядок" нелинейного степенного момента $\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta,u)$ при $\theta\to 0$, который и порождает классификацию нелинейных систем вида (1). Следуя [2], определим понятие *аппроксимации в смысле быстродействия.*

Определение 1. Рассмотрим две min-проблемы моментов

$$s=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{k\geq 1,m_i\geq 0\\ m_1+\cdots+m_k+k=m}} v_{m_1\ldots m_k}\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta,u) \tag{5}$$

и

$$s=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{k\geq 1,m_i\geq 0\\ m_1+\cdots+m_k+k=m}} v'_{m_1\ldots m_k}\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta,u), \tag{6}$$

отвечающие двум нелинейным системам вида (1), и предположим, что в некоторой открытой области $\Omega\subset\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ (такой, что $0\in\overline{\Omega}$) для любого $s\in\overline{\Omega}$ существует единственное решение $(\theta^*_s,u^*_s(t))$ min-проблемы (6). Пусть $U_s(\theta)$ — множество всех функций $u(t)$, удовлетворяющих равенству (5) при фиксированном θ и таких, что $|u(t)|\leq 1$, и пусть $\theta_s=\min\{\theta : U_s(\theta)\neq\emptyset\}$.

Мы говорим, что min-проблема моментов (6) аппроксимирует min-проблему моментов (5) в области Ω, если существует невырожденное преобразование Φ окрестности нуля, $\Phi(0)=0$, и множество пар $(\tilde\theta_s,\tilde u_s(t))$, $s\in\Omega$, таких, что $\tilde u_s(t)\in U_{\Phi(s)}(\tilde\theta_s)$ и

$$\frac{\theta_{\Phi(s)}}{\theta^*_s}\to 1,\qquad \frac{\tilde\theta_s}{\theta^*_s}\to 1, \tag{7}$$

$$\frac{1}{\theta}\int\limits_0^{\theta}|u^*_s(t)-\tilde u_s(t)|dt\to 0\qquad\text{при}\qquad s\to 0,\quad s\in\Omega, \tag{8}$$

где $\theta=\min\{\tilde\theta_s,\theta^*_s\}$.

Описание аппроксимирующих проблем моментов, предложенное в [2], основано на следующей алгебраической конструкции. Рассмотрим множество абстрактных независимых элементов $\{\xi_m\}_{m=0}^{\infty}$ как "алфавит" для свободной ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ над $\mathbb{R}$. Другими словами, определим $\mathcal{A}$ как линейную оболочку базисных элементов вида $\xi_{m_1}\cdots\xi_{m_k}$, которые для краткости будем обозначать $\xi_{m_1}\cdots\xi_{m_k}=\xi_{m_1\ldots m_k}$. Как показано в [1], "настоящие" нелинейные степенные моменты (3) также являются независимыми, если их рассматривать как функционалы, определенные на пространстве $L_\infty[0,\theta]$, так что линейную оболочку нелинейных степенных моментов (3) можно считать "реализацией" абстрактной алгебры $\mathcal{A}$. При этом асимптотическому порядку нелинейных степенных моментов (4) отвечает следующая градуировка алгебры: $\mathcal{A} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{A}_m$, где $\mathcal{A}_m = \mathrm{Lin}\{a \in \mathcal{A} : \mathrm{ord}(a) = m\}$. Элементы каждого подпространства $\mathcal{A}_m$ будем называть однородными элементами порядка m.

Произведению нелинейных степенных моментов как функционалов от u отвечает ассоциативная и коммутативная операция shuffle-произведения в алгебре $\mathcal{A}$, определяемая рекуррентно по формулам [5]:

$$\xi_m * \xi_n = \xi_{mn} + \xi_{nm},$$

$$\xi_{m_1\ldots m_k} * \xi_n = (\xi_{m_1\ldots m_{k-1}} * \xi_n)\xi_{m_k} + \xi_{m_1\ldots m_k}\xi_n,$$

$$\xi_{m_1\ldots m_k} * \xi_{n_1\ldots n_s} = (\xi_{m_1\ldots m_{k-1}} * \xi_{n_1\ldots n_s})\xi_{m_k} + (\xi_{m_1\ldots m_k} * \xi_{n_1\ldots n_{s-1}})\xi_{n_s}.$$

Представление системы (1) в виде ряда нелинейных степенных моментов порождает линейное отображение $v : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$, действующее по правилу $v(\xi_{m_1\ldots m_k}) = v_{m_1\ldots m_k}$. Пусть L — алгебра Ли, порожденная множеством $\{\xi_m\}_{m=0}^{\infty}$ и операцией $[\ell_1, \ell_2] = \ell_1\ell_2 - \ell_2\ell_1$, $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{A}$. Можно показать [2], что отображение v обладает следующим важным свойством:

(A) *если для некоторого $\ell \in L$ имеет место равенство $v(\ell) = 0$, то $v(\ell z) = 0$ для произвольного $z \in \mathcal{A}$.*

Это означает, что отображение v порождает *структуру правого идеала в алгебре $\mathcal{A}$.*

Приведем точное определение. Рассмотрим нелинейную систему вида (1) и порожденное ею отображение $v : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$. Предположим, что $v(L) = \mathbb{R}^n$. Как известно, это условие означает, что область управляемости системы (1) является n-мерной, т.е. имеет непустую внутренность в пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть r — минимальное из таких чисел, что $v(L \cap (\mathcal{A}_1 + \cdots + \mathcal{A}_r)) = \mathbb{R}^n$.

Пусть P — множество всех элементов $p \in L \cap \mathcal{A}_q$, где $q \le r$, таких, что $v(p) \in v(L \cap (\mathcal{A}_1 + \cdots + \mathcal{A}_{q-1}))$. *Правым идеалом, отвечающим системе (1), называется множество*

$$J = \{p\, z : p \in P,\ z \in \mathcal{A} + \mathbb{R}\}. \tag{9}$$

Как следует из определения и свойства (A), если $a \in J \cap \mathcal{A}_m$, то $v(a) \in v(\mathcal{A}_1 + \cdots + \mathcal{A}_{m-1})$.

Далее будем считать, что в алгебре $\mathcal{A}$ введено скалярное произведение так, что базис $\xi_{m_1\ldots m_k}$ является ортонормированным. В работе [2] доказана следующая важная теорема о разложении алгебры по правому идеалу.

Теорема A. *Пусть J — правый идеал (9), отвечающий системе (1). Обозначим символом $\widetilde{\ }$ ортогональную проекцию на подпространство $J^{\perp}$. Тогда*

$$\mathcal{A} = J \oplus \widetilde{L} \oplus \widetilde{L}^{\mathrm{sh}},$$

где $\widetilde{L}^{\mathrm{sh}} = \mathrm{Lin}\{a_1 * \dots * a_q : q \ge 2, a_i \in \widetilde{L}\}$, *причем*

$$\mathcal{A}_m = (J \cap \mathcal{A}_m) \oplus (\widetilde{L} \cap \mathcal{A}_m) \oplus (\widetilde{L}^{\mathrm{sh}} \cap \mathcal{A}_m)$$

для любого m.

По построению, найдется ровно n таких элементов $\ell_i \in L$, что их проекции $\widetilde{\ell}_i$ на $J^\perp$ линейно независимы. Без ограничения общности считаем, что $\ell_i \in \mathcal{A}_{r_i}$ для некоторых r_i; тогда $\widetilde{\ell}_i \in \mathcal{A}_{r_i}$. Следовательно, базис $\widetilde{L}^{\mathrm{sh}}$ образуют элементы вида $\widetilde{\ell}_{i_1} * \dots * \widetilde{\ell}_{i_k}$, где $k \ge 2$, $1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n$. Более того, можно считать также, что элементы $\widetilde{\ell}_i$ образуют ортонормированный базис подпространства $\widetilde{L}$. Наконец, будем считать, что $v(\widetilde{\ell}_i) = e_i$; этого всегда можно добиться, применив в исходной системе линейную замену переменных.

Из теоремы о разложении алгебры по правому идеалу следует, что ряд нелинейных степенных моментов

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{k \ge 1, m_i \ge 0 \\ m_1 + \dots + m_k + k = m}} v_{m_1 \dots m_k} \xi_{m_1 \dots m_k}$$

можно “переразложить” по новому базису,

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{b_j \in J \cap \mathcal{A}_m} v(b_j) b_j + \sum_{\widetilde{\ell}_i \in \mathcal{A}_m} v(\widetilde{\ell}_i) \widetilde{\ell}_i + \sum_{\substack{k \ge 2 \\ \widetilde{\ell}_{i_1} * \dots * \widetilde{\ell}_{i_k} \in \mathcal{A}_m}} v(z_{i_1 \dots i_k}) \widetilde{\ell}_{i_1} * \dots * \widetilde{\ell}_{i_k} \right),$$

где $\{b_j\}$ – ортонормированный базис J, а $z_{i_1 \dots i_k}$ – двойственный базис к базису $\widetilde{\ell}_{i_1} * \dots * \widetilde{\ell}_{i_k}$ в подпространстве $\widetilde{L}^{\mathrm{sh}}$. Записывая последнее равенство покомпонентно и учитывая определение правого идеала J, получаем, что

$$S_q = \widetilde{\ell}_q + \sum_{\substack{k \ge 2 \\ \mathrm{ord}(\widetilde{\ell}_{i_1} * \dots * \widetilde{\ell}_{i_k}) \le \mathrm{ord}(\widetilde{\ell}_q)}} (v(z_{i_1 \dots i_k}))_q \widetilde{\ell}_{i_1} * \dots * \widetilde{\ell}_{i_k}$$

$$+ \sum_{\mathrm{ord}(\xi_{m_1 \dots m_k}) \ge \mathrm{ord}(\widetilde{\ell}_q) + 1} (v_{m_1 \dots m_k})_q \xi_{m_1 \dots m_k}.$$

Поскольку $i_1, \dots, i_k \le q - 1$, то, применяя некоторое полиномиальное преобразование $\Phi = \Phi(S)$, приходим к следующему *каноническому виду* ряда нелинейных степенных моментов:

$$\Phi(S)_q = \widetilde{\ell}_q + \sum_{\mathrm{ord}(\xi_{m_1 \dots m_k}) \ge \mathrm{ord}(\widetilde{\ell}_q) + 1} (\hat{v}_{m_1 \dots m_k})_q \xi_{m_1 \dots m_k}, \qquad q = 1, \dots, n.$$

Это преобразование отвечает (невырожденной) замене переменных в исходной системе, так что без ограничения общности можно считать, что ряд нелинейных степенных моментов, отвечающий системе (1), имеет вид

$$S_q = \widetilde{\ell}_q + \sum_{\mathrm{ord}(\xi_{m_1\ldots m_k})\geq \mathrm{ord}(\widetilde{\ell}_q)+1} (v_{m_1\ldots m_k})_q \xi_{m_1\ldots m_k}, \quad q = 1,\ldots,n,$$

т.е. ряд

$$S_q = \widetilde{\ell}_q, \quad q = 1,\ldots,n, \tag{10}$$

является “главной частью” ряда нелинейных степенных моментов исходной системы. Интересно отметить, что существует такая система вида (1), для которой ряд нелинейных степенных моментов имеет вид (10).

Нетрудно описать все возможные “главные части” рядов нелинейных степенных моментов, отвечающих системам вида (1). А именно, зафиксируем произвольное $r \geq 1$ и последовательность подпространств $M = \{M_m\}_{m=1}^r$, $M_m \subset L \cap \mathcal{A}_m$ такую, что $\sum_{m=1}^r (\dim(L\cap\mathcal{A}_m) - \dim M_m) = n$. Положим $J = J_M = \mathrm{Lin}\{pz : p \in \sum_{m=1}^r M_m, z \in \mathcal{A} + \mathbb{R}\}$. Далее $\mathcal{J}$ обозначает семейство всех таких правых идеалов. Очевидно, правые идеалы, соответствующие системам вида (1), принадлежат $\mathcal{J}$. Как показано в [2], верно и обратное: для каждого правого идеала J из $\mathcal{J}$ найдется такая система вида (1), правый идеал которой совпадает с J, а ряд нелинейных степенных моментов имеет вид (10), где $\widetilde{\ell}_1,\ldots,\widetilde{\ell}_n$ — (однородный) базис ортогональной проекции L на подпространство $J^\perp$. Таким образом, с точностью до выбора базиса L правые идеалы из $\mathcal{J}$ взаимно однозначно соответствуют множеству “главных частей” вида (10).

В работе [2] доказана следующая теорема об аппроксимации.

Теорема B. *Пусть J — правый идеал, отвечающий системе (1), а $\widetilde{\ell}_1,\ldots,\widetilde{\ell}_n$ — (однородный) базис проекции L на подпространство $J^\perp$. Предположим, что в некоторой открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in \overline{\Omega}$, min-проблема моментов*

$$s_q = \widetilde{\ell}_q(\theta, u), \quad q = 1,\ldots,n, \tag{11}$$

имеет единственное решение $(\theta_s^*, u_s^*(t))$. Пусть, далее, функция θ_s^* является непрерывной и пусть, наконец, для множества всевозможных оптимальных управлений $K = \{u_s^*(t\theta_s^*) : s \in \Omega\} \subset L_2[0,1]$ выполнено условие

(C) *если последовательность элементов множества K сходится слабо, то она сходится и сильно.*

Тогда существует такое семейство $\{\Omega(\delta)\}_{\delta>0}$ вложенных областей (а именно, $\Omega(\delta_1) \subset \Omega(\delta_2)$ при $\delta_1 > \delta_2$), что min-проблема моментов (11) *аппроксимирует задачу быстродействия для исходной системы в любой области* $\Omega(\delta)$ *и* $\cup_{\delta>0}\Omega(\delta) = \Omega$.

В том случае, когда min-проблема моментов (1) является линейной (т.е. $\widetilde{\ell}_q = \xi_{m_q}$ для некоторых m_q), оказывается, что верно и обратное [1].

Теорема C. *Если задача быстродействия для нелинейной системы (1) аппроксимируется линейной min-проблемой моментов*

$$s_q = \xi_{m_q}(\theta, u), \qquad q = 1, \dots, n, \tag{12}$$

в некоторой открытой области в смысле определения 1, то элементы $\widetilde{\ell}_q = \xi_{m_q}$, $q = 1, \dots, n$, *образуют базис подпространства* $\widetilde{L}$ *(где* $\widetilde{L}$ *— ортогональная проекция* L *на подпространство* $J^{\perp}$*, а* J *— правый идеал, соответствующий исходной системе).*

В связи с этим заметим, что для min-проблемы моментов (12) условия теоремы B, очевидно, выполнены, поскольку оптимальными являются управления, равные ± 1 и имеющие не более $n-1$ переключения.

В настоящей работе мы покажем, что *теорему C можно обобщить на случай нелинейных аппроксимирующих min-проблем моментов, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям.*

2. Теорема об аппроксимации

Зафиксируем вектор $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ такой, что $a_i \neq a_{i+1}$ и $a_n \neq 0$, и рассмотрим множество всех кусочно-постоянных функций, заданных на отрезке $[0, 1]$, имеющих $n-1$ переключение и принимающих значения a_i на интервалах постоянства. Точнее, обозначим

$$V = \{u : u(t) = a_{i+1}, t \in (t_i, t_{i+1}),\ 0 \le i \le n-1,\ 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1\}. \tag{13}$$

Введем также в рассмотрение множество

$$V^1 = \{u : u(t) = a_{i+1}, t \in (t_i, t_{i+1}),\ 1 \le i \le n-1,\ 0 = t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1\}, \tag{14}$$

т.е. множество всех кусочно-постоянных функций, имеющих $n-2$ переключения и принимающих значения $a_2, \dots, a_n$ на интервалах постоянства.

Лемма 1. *Пусть равенство*

$$\sum_{\substack{k \ge 1, m_1, \dots, m_{k-1} \ge 0, m_k \ge p \\ m_1 + \dots + m_k + k = m}} \mu_{m_1 \dots m_k} \xi_{m_1 \dots m_k}(1, u) = 0, \tag{15}$$

где $\mu_{m_1\dots m_k}$ — некоторые числа, выполнено для любого $u(t) \in V$. Тогда для любого $u(t) \in V^1$ имеет место равенство

$$\sum_{\substack{k\ge 1, m_1,\dots,m_{k-1}\ge 0\\ m_1+\dots+m_{k-1}+p+k=m}} \mu_{m_1\dots m_{k-1}p}\,\xi_{m_1\dots m_{k-1}}(1,u) = 0 \tag{16}$$

(при $p = m-1$ равенство (16) принимает вид $\mu_{p-1} = 0$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим подробнее вид $\xi_{m_1\dots m_k}(1,u)$. Имеем

$$\xi_{m_1\dots m_k}(1,u) = \int_0^1\int_0^{\tau_1}\cdots\int_0^{\tau_{k-1}} \tau_1^{m_1}\tau_2^{m_2}\cdots\tau_k^{m_k}\prod_{j=1}^{k}u(\tau_j)\,d\tau_k\cdots d\tau_2 d\tau_1$$

$$= \int_0^1\int_{\tau_k}^1\cdots\int_{\tau_2}^1 \tau_1^{m_1}\tau_2^{m_2}\cdots\tau_k^{m_k}\prod_{j=1}^{k}u(\tau_j)\,d\tau_1\cdots d\tau_{k-1}d\tau_k$$

$$= \int_0^1 \tau_k^{m_k}u(\tau_k)\phi_k(\tau_k)d\tau_k,$$

где $\phi_1(\tau_1) \equiv 1$ и

$$\phi_k(\tau_k) = \int_{\tau_k}^1\cdots\int_{\tau_2}^1 \tau_1^{m_1}\tau_2^{m_2}\cdots\tau_{k-1}^{m_{k-1}}\prod_{j=1}^{k-1}u(\tau_j)\,d\tau_1\cdots d\tau_{k-1}, \quad k\ge 2.$$

Заметим, что

$$\phi_k(0) = \xi_{m_1\dots m_{k-1}}(1,u), \quad k \ge 2.$$

Таким образом,

$$\xi_{m_1\dots m_k}(1,u) = \int_0^{t_1}\tau_k^{m_k}u(\tau_k)\phi_k(\tau_k)d\tau_k + \int_{t_1}^1\tau_k^{m_k}u(\tau_k)\phi_k(\tau_k)d\tau_k.$$

Заметим еще, что при $u(t) \in V$

$$\frac{\partial\xi_{m_1\dots m_k}(1,u)}{\partial t_1} = (a_1-a_2)t_1^{m_k}\phi_k(t_1).$$

Следовательно, из (15) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\sum_{\substack{k\ge 1, m_1,\dots,m_{k-1}\ge 0, m_k\ge p\\ m_1+\dots+m_k+k=m}} \mu_{m_1\dots m_k}\xi_{m_1\dots m_k}(1,u)\right)$$

$$= \sum_{\substack{k\geq 1, m_1,\dots,m_{k-1}\geq 0, m_k\geq p\\ m_1+\dots+m_k+k=m}} \mu_{m_1\dots m_k}(a_1-a_2)t_1^{m_k}\phi_k(t_1) = 0 \tag{17}$$

для любых $t_1 \in [0,1]$. Умножая на t_1^{-p}, устремляя t_1 к нулю и учитывая, что $a_1 \neq a_2$, получаем

$$\sum_{\substack{k\geq 1, m_1,\dots,m_{k-1}\geq 0\\ m_1+\dots+m_{k-1}+p+k=m}} \mu_{m_1\dots m_{k-1}p}\,\xi_{m_1\dots m_{k-1}}(1,u) = 0, \tag{18}$$

где $u(t)$ пробегает множество V^1, откуда следует (16). ■

Теорема 1. *Пусть J — некоторый правый идеал из семейства $\mathcal{J}$, а $\widetilde{\ell}_1,\dots,\widetilde{\ell}_n$ — базис ортогональной проекции алгебры Ли L на подпространство $J^\perp$, состоящий из однородных элементов таких, что* $\mathrm{ord}(\widetilde{\ell}_1) \leq \dots \leq \mathrm{ord}(\widetilde{\ell}_n)$. *Предположим, что min-проблема моментов*

$$s_q = \widetilde{\ell}_q(\theta, u), \qquad q = 1,\dots,n, \tag{19}$$

аппроксимирует задачу быстродействия для системы (1) в смысле определения 1 в некоторой области Ω и, кроме того,

(i) множество $U = \{u_s^*(t\theta_s^*) : s \in \Omega\}$, где $(\theta_s^*, u_s^*(t))$ — решение min-проблемы (19), содержит некоторое множество V вида (13);

(ii) множество $\{(\theta^{\mathrm{ord}(\widetilde{\ell}_1)}\widetilde{\ell}_1(1,u),\dots,\theta^{\mathrm{ord}(\widetilde{\ell}_{n-1})}\widetilde{\ell}_{n-1}(1,u)) : u \in V^1, \theta \in [0,1]\}$, *где V^1 определяется в (14), имеет непустую внутренность в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$.*

Тогда J совпадает с правым идеалом, соответствующим системе (1), так что после некоторой замены переменных в системе ее ряд нелинейных степенных моментов принимает вид

$$S_q = \widetilde{\ell}_q + \sum_{m=\mathrm{ord}(\widetilde{\ell}_q)+1}^{\infty} \sum_{\substack{k\geq 1, m_i\geq 0\\ m_1+\dots+m_k+k=m}} (v_{m_1\dots m_k})_q \xi_{m_1\dots m_k}, \qquad q = 1,\dots,n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности считаем, что $\Phi(s) = s$. Тогда, используя обозначения определения 1, в силу (7), (8) имеем

$$\xi_{m_1\dots m_k}(\tilde{\theta}_s, \tilde{u}_s) - \xi_{m_1\dots m_k}(\theta_s^*, u_s^*) = \bar{o}((\theta_s^*)^{m_1+\dots+m_k+k})$$

при $s \to 0$, $s \in \Omega$. Следовательно,

$$s_q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{k\geq 1, m_i\geq 0\\ m_1+\dots+m_k+k=m}} (v_{m_1\dots m_k})_q \xi_{m_1\dots m_k}(\tilde{\theta}_s, \tilde{u}_s)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{k\geq 1, m_i\geq 0\\ m_1+\cdots+m_k+k=m}} (v_{m_1\ldots m_k})_q(\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta_s^*, u_s^*) + \bar{o}((\theta_s^*)^m)) = \widetilde{\ell}_q(\theta_s^*, u_s^*)$$

при $s \to 0$, $s \in \Omega$. Таким образом, имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\theta_s^*)^m \sum_{\substack{k\geq 1, m_i\geq 0\\ m_1+\cdots+m_k+k=m}} (v_{m_1\ldots m_k})_q(\xi_{m_1\ldots m_k}(1, \hat{u}_s^*) + \bar{o}(1)) = (\theta_s^*)^{\mathrm{ord}(\widetilde{\ell}_q)}\widetilde{\ell}_q(1, \hat{u}_s^*),$$

где $\hat{u}_s^*(t) = u_s^*(t\theta_s^*)$, $t \in [0,1]$. Пусть теперь s стремится к нулю произвольным образом, оставаясь в области Ω. Тогда $\theta_s^* \to 0$, а управление $\hat{u}_s^*(t)$ пробегает множество U.

Таким образом, в силу условия (i) теоремы для любой функции $u(t) \in V$ справедливо соотношение

$$\sum_{m=1}^{\infty} \theta^m \sum_{\substack{k\geq 1, m_i\geq 0\\ m_1+\cdots+m_k+k=m}} (v_{m_1\ldots m_k})_q\Big(\xi_{m_1\ldots m_k}(1, u) + \bar{o}(1)\Big) = \theta^{\mathrm{ord}(\widetilde{\ell}_q)}\widetilde{\ell}_q(1, u),\ \ \theta \to 0. \tag{20}$$

Далее J' обозначает правый идеал, соответствующий системе (1). Пусть $\widetilde{L}'$ — проекция Ли алгебры L на подпространство $(J')^{\perp}$, а $\widetilde{\ell}'_1, \ldots, \widetilde{\ell}'_n$ — базис подпространства $\widetilde{L}'$, состоящий из однородных элементов, $\mathrm{ord}(\widetilde{\ell}'_1) \leq \cdots \leq \mathrm{ord}(\widetilde{\ell}'_n)$. Без ограничения общности будем считать, что базисы $\{\widetilde{\ell}_1, \ldots, \widetilde{\ell}_n\}$ и $\{\widetilde{\ell}'_1, \ldots, \widetilde{\ell}'_n\}$ ортонормированы.

Обозначим

$$r_k = \mathrm{ord}(\widetilde{\ell}_k),\ r'_k = \mathrm{ord}(\widetilde{\ell}'_k),\ k = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что по построению элемент минимального порядка как в базисе $\{\widetilde{\ell}_1, \ldots, \widetilde{\ell}_n\}$, так и в базисе $\{\widetilde{\ell}'_1, \ldots, \widetilde{\ell}'_n\}$, является “одномерным”, т.е. $\widetilde{\ell}_1 = \xi_{r_1-1}$, $\widetilde{\ell}'_1 = \xi_{r'_1-1}$. Следовательно, элемент минимального порядка в каждом базисе единственный. Более того, это означает, что

$$\begin{aligned} v_{m_1\ldots m_k} &= 0, \qquad k \geq 1,\ m_1 + \cdots + m_k + k \leq r'_1 - 1.\\ v_{m_1\ldots m_k} &= 0, \qquad k \geq 2,\ m_1 + \cdots + m_k + k = r'_1. \end{aligned}$$

Тогда из (20) получаем

$$\begin{aligned} \theta^{r'_1}\Big((v_{r'_1-1})_1\xi_{r'_1-1}(1, u) + \bar{o}(1)\Big) &= \theta^{r_1}\xi_{r_1-1}(1, u),\\ \theta^{r'_1}\Big((v_{r'_1-1})_q\xi_{r'_1-1}(1, u) + \bar{o}(1)\Big) &= \bar{o}(\theta^{r_1}), \quad q \geq 2. \end{aligned}$$

Поскольку, очевидно, $\xi_{r'_1-1}(1, u) \not\equiv 0$ и $\xi_{r_1-1}(1, u) \not\equiv 0$ при $u \in V$, получаем, что $r'_1 = r_1$ и $v_{r_1-1} = (1, 0, \ldots, 0)$, т.е. $\widetilde{\ell}'_1 = \widetilde{\ell}_1$.

Таким образом, мы показали, что из условия (20) следует:

$$\sum_{m=r_1+1}^{\infty}\theta^m\sum_{\substack{k\ge1,m_i\ge0\\ m_1+\dots+m_k+k=m}}(v_{m_1\dots m_k})_q\Big(\xi_{m_1\dots m_k}(1,u)+\bar o(1)\Big)=\theta^{r_q}\widetilde{\ell}_q(1,u)$$

при $q\ge2$ для $u\in V$.

Предположим теперь, что для некоторого $1\le h\le n-1$ имеют место равенства $\widetilde{\ell}_i=\widetilde{\ell}'_i$, $i=1,\dots,h$, и

$$\sum_{m=r_h+1}^{\infty}\theta^m\sum_{\substack{k\ge1,m_i\ge0\\ m_1+\dots+m_k+k=m}}(v_{m_1\dots m_k})_q\Big(\xi_{m_1\dots m_k}(1,u)+\bar o(1)\Big)=\theta^{r_q}\widetilde{\ell}_q(1,u)\qquad(21)$$

для $q\ge h+1$ при $u\in V$. Выделим слагаемые порядка r_h+1 в левой части (21). Имеем

$$\theta^{r_h+1}\Bigg(\sum_{\substack{k\ge1,m_i\ge0\\ m_1+\dots+m_k+k=r_h+1}}(v_{m_1\dots m_k})_q\xi_{m_1\dots m_k}(1,u)+\bar o(1)\Bigg)=\theta^{r_q}\widetilde{\ell}_q(1,u)\qquad(22)$$

для $q\ge h+1$. Так как $\widetilde{\ell}_q(1,u)\not\equiv0$ при $u\in V$, то $r_h+1\le r_q$. Деля на θ^{r_h+1} и устремляя θ к нулю, получаем из (22)

$$\sum_{\substack{k\ge1,m_i\ge0\\ m_1+\dots+m_k+k=r_h+1}}(v_{m_1\dots m_k})_q\xi_{m_1\dots m_k}(1,u)=\begin{cases}\widetilde{\ell}_q(1,u), & r_q=r_h+1,\\ 0, & r_q>r_h+1.\end{cases}\qquad(23)$$

Далее удобно ввести линейное отображение $w:\mathcal{A}\to\mathbb{R}^n$, действующее по правилу

$$w(\widetilde{\ell}_q)=e_q,\ q=1,\dots,n,\quad w(J)=w(\widetilde{L}^{\rm sh})=0,$$

т.е. отображение, соответствующее ряду (19). Введем также отображения $\mu^q:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$, $q\ge h+1$, действующие по правилу

$$\mu^q(\xi_{m_1\dots m_k})=\begin{cases}(v_{m_1\dots m_k})_q-(w_{m_1\dots m_k})_q, & r_q=r_h+1,\\ (v_{m_1\dots m_k})_q, & r_q>r_h+1.\end{cases}$$

Последовательно применяя лемму 1 для $p=0,\dots,r_h$, получаем из (23)

$$\sum_{\substack{k\ge1,m_i\ge0\\ m_1+\dots+m_{k-1}+p+k=r_h+1}}\mu^q(\xi_{m_1\dots m_{k-1}p})\xi_{m_1\dots m_{k-1}}(1,u)=0\qquad(24)$$

для $u \in V^1$. Заметим, что в левой части (24) нелинейные степенные моменты имеют порядок $m_1 + \cdots + m_{k-1} + k - 1 = r_h - p \le r_h$. Применяя теорему A, разложим левую часть (24) по базису

$$\{\widetilde{\ell}_{j_1} * \cdots * \widetilde{\ell}_{j_d} : d \ge 1, \sum_{i=1}^{d} r_{j_i} = r_h - p\} \cup \{b_j : b_j \in J \cap \mathcal{A}_{r_h - p}\}. \tag{25}$$

Пусть $\{z_{j_1 \dots j_d}\} \cup \{\hat{b}_j\}$ — двойственный базис к базису (25). Поскольку по предположению индукции $J \cap \mathcal{A}_{r_h-p} = J' \cap \mathcal{A}_{r_h-p}$, получаем $v(\hat{b}_j \xi_p) \in v(\mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_{r_h})$ и $w(\hat{b}_j \xi_p) \in w(\mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_{r_h})$, следовательно, $\mu^q(\hat{b}_j \xi_p) = 0$ при $q \ge h+1$. Итак, из (24) получаем

$$\sum_{d \ge 1, r_{j_1} + \cdots + r_{j_d} = r_h - p} \mu^q(z_{j_1 \dots j_d} \xi_p) \widetilde{\ell}_{j_1}(1,u) * \cdots * \widetilde{\ell}_{j_d}(1,u) = 0, \tag{26}$$

$p = 0, \dots, r_h$, $u \in V^1$. Обозначим $y_j = \widetilde{\ell}_j(\theta, \hat{u})$, $j = 1, \dots, h$, где $\hat{u}(t) = u(t/\theta)$, $t \in [0, \theta]$. Из условия (ii) теоремы следует, что вектор $y = (y_1, \dots, y_h)$ пробегает множество с непустой внутренностью в пространстве $\mathbb{R}^h$, когда u пробегает множество V^1. Таким образом, (26) означает, что полином от переменных $y_1, \dots, y_h$ тождественно равен нулю на открытом множестве. Следовательно, коэффициенты этого полинома равны нулю

$$\mu^q(z_{j_1 \dots j_d} \xi_p) = 0, \quad d \ge 1, r_{j_1} + \cdots + r_{j_d} = r_h - p.$$

А поскольку и $\mu^q(\hat{b}_j \xi_p) = 0$, получаем, что

$$\mu^q(\xi_{m_1 \dots m_{k-1} p}) = 0, \quad m_1 + \cdots + m_{k-1} + p + k = r_h + 1.$$

Применяя эти рассуждения последовательно для всех $p = 0, \dots, r_h$, получаем $\mu^q(\mathcal{A}_{r_h+1}) = 0$ для всех $q \ge h+1$. Итак,

$$(v_{m_1 \dots m_k})_q = \begin{cases} (w_{m_1 \dots m_k})_q, & r_q = r_h + 1, \\ 0, & r_q > r_h + 1. \end{cases} \tag{27}$$

Следовательно, если $r_{h+1} = r_h + 1$, то получаем

$$\sum_{\substack{k \ge 1, m_i \ge 0 \\ m_1 + \cdots + m_k + k = r_{h+1}}} (v_{m_1 \dots m_k})_q \xi_{m_1 \dots m_k} = \begin{cases} \widetilde{\ell}_q, & r_q = r_{h+1} \\ 0, & r_q > r_{h+1}. \end{cases} \tag{28}$$

Если же $r_{h+1} > r_h + 1$, то, учитывая (27), получаем из (22) равенства

$$\sum_{m = r_h + 2}^{\infty} \theta^m \sum_{\substack{k \ge 1, m_i \ge 0 \\ m_1 + \cdots + m_k + k = m}} (v_{m_1 \dots m_k})_q \Big(\xi_{m_1 \dots m_k}(1,u) + \bar{o}(1) \Big) = \theta^{r_q} \widetilde{\ell}_q(1,u), \tag{29}$$

$q \geq h+1$ при $u \in V^1$. Применяя к (29) такие же рассуждения, какие мы применяли к (21), через несколько шагов придем к равенствам (28).

Заметим, что соотношения (28) — это равенства между элементами алгебры. Применяя теорему A и предположения индукции, разложим левую часть (28) по базису

$$\{\widetilde{\ell}'_j : r'_j = r_{h+1}\} \cap \{\widetilde{\ell}_{j_1} * \cdots * \widetilde{\ell}_{j_d} : d \geq 2, \sum_{i=1}^{d} r_{j_i} = r_{h+1}\} \cup \{b'_j : b'_j \in J' \cap \mathcal{A}_{r_{h+1}}\}.$$

По определению правого идеала J' и предположению индукции имеем $(v(b'_j))_q = 0$ при $q \geq h+1$. Следовательно, для тех q, для которых $r_q = r_{h+1}$, из (28) имеем

$$\sum_{r'_j = r_{h+1}} (v(\widetilde{\ell}'_j))_q \widetilde{\ell}'_j + \sum_{\substack{d \geq 2 \\ r_{j_1} + \cdots + r_{j_d} = r_{h+1}}} (v(z_{j_1 \ldots j_d}))_q \widetilde{\ell}_{j_1} * \cdots * \widetilde{\ell}_{j_d} = \widetilde{\ell}_q.$$

Однако элементы $\widetilde{\ell}_{j_1} * \cdots * \widetilde{\ell}_{j_d}$ при $d \geq 2$ ортогональны как $\widetilde{\ell}'_j$, так и $\widetilde{\ell}_j$; в результате из последнего равенства получаем

$$\sum_{r'_j = r_{h+1}} (v(\widetilde{\ell}'_j))_q \widetilde{\ell}'_j = \widetilde{\ell}_q, \qquad r_q = r_{h+1}.$$

Таким образом, без ограничения общности можно считать, что $\widetilde{\ell}'_q = \widetilde{\ell}_q$, если $r_q = r_{h+1}$ (этого можно добиться линейным преобразованием). Кроме того, из (27) получаем равенство

$$\sum_{m = r_{h'}+1}^{\infty} \theta^m \sum_{\substack{k \geq 1, m_i \geq 0 \\ m_1 + \cdots + m_k + k = m}} (v_{m_1 \ldots m_k})_q \Big(\xi_{m_1 \ldots m_k}(1, u) + \bar{o}(1)\Big) = \theta^{r_q} \widetilde{\ell}_q(1, u), \tag{30}$$

которое имеет место для $q \geq h'+1$ при $u \in V$, где h' — наибольший из таких индексов, что $r_{h'} = r_{h+1}$.

Следовательно, из соотношения (21) мы получили (30), где $h' \geq h+1$. Применение индукции доказывает теорему. ■

Заметим, что доказать утверждение, аналогичное лемме 1, можно и для более широкого класса управлений. Так, достаточно требовать существования только одного разрыва или рассмотреть класс непрерывных функций, производная которых имеет разрыв.

Пример. В работе [2] получено полное решение задачи наискорейшего попадания в начало координат для нелинейной системы

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{x}_3 = \tfrac{1}{2} x_1^2. \tag{31}$$

Показано, что область управляемости в нуль для этой системы имеет вид

$$D = \{x : x_3 < -\tfrac{1}{6}|x_1|^3\} \cup \{x = (x_1, -\tfrac{1}{2}x_1|x_1|, -\tfrac{1}{6}|x_1|^3)\}.$$

Эта область поверхностью $M = \{x : x_3 = -\frac{1}{6}\sigma x_1^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x_1^2 + \sigma x_2\right)^{3/2}\}$, где $\sigma = \mathrm{sign}(x_2 + \frac{1}{2}x_1|x_1|)$, разбивается на две части:

$$D_0 = \{x : -\tfrac{1}{6}\sigma x_1^3 - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}x_1^2 + \sigma x_2\right)^{3/2} < x_3 < -\tfrac{1}{6}|x_1|^3\},$$

$$D_1 = \{x : x_3 < -\tfrac{1}{6}\sigma x_1^3 - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}x_1^2 + \sigma x_2\right)^{3/2}\}.$$

Для точек $x^0 \in D_1$ класс оптимальных по быстродействию управлений совпадает с классом кусочно-постоянных функций, принимающих значения ± 1 и имеющих два переключения. В обозначениях, введенных в начале разд. 2, это означает, что множество V при $a = (1, -1, 1)$ содержится в этом классе (можно выбрать также $a = (-1, 1, -1)$).

Для точек $x^0 \in D_0$ класс оптимальных по быстродействию управлений содержит множество V при $a = (1, 0, 1)$ (а также при $a = (-1, 0, 1)$, $a = (-1, 0, -1)$ или $a = (1, 0, -1)$).

Таким образом, min-проблема моментов

$$s_1 = \xi_0, \ s_2 = \xi_1, \ s_3 = \xi_{01} - \xi_{10},$$

эквивалентная (с точностью до полиномиальной замены переменных) задаче быстродействия для системы (31), удовлетворяет условиям теоремы 1. Следовательно, если она аппроксимирует задачу быстродействия для некоторой трехмерной системы (1) в смысле определения 1 в области D_0 или D_1, то правый идеал, соответствующий этой системе, имеет вид $J = \mathrm{Lin}\{\xi_2 z, z \in \mathcal{A} + \mathbb{R}\}$. Другими словами, после некоторой замены переменных ряд нелинейных степенных моментов, соответствующий этой системе, принимает вид

$$S = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_{01} - \xi_{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix},$$

где ρ_i содержит слагаемые порядка не ниже $i+1$ при $i = 1, 2, 3$.

Список литературы

[1] *G.M. Sklyar and S.Yu. Ignatovich*, Moment approach to nonlinear time optimality. — *SIAM J. Control and Optimiz.* (2000), v. 38, p. 1707–1728.

[2] *G.M. Sklyar and S.Yu. Ignatovich*, Approximation of time-optimal control problems via nonlinear power moment min-problems. — *SIAM J. Control and Optimiz.* (2003), v. 42, No. 4, p. 1325–1346.

[3] *G.M. Sklyar and S.Yu. Ignatovich*, Representations of control systems in the Fliess algebra and in the algebra of nonlinear power moments. — *Syst. Control Lett.* (2002), v. 47, p. 227–235.

[4] *В.И. Коробов, Г.М. Скляр*, Проблема моментов Маркова на минимально возможном отрезке. — *Докл. АН СССР* (1989), т. 308, с. 525–528.

[5] *R. Ree*, Lie elements and an algebra assotiated with shuffles. — *Ann. Math.* (1958), v. 68, No. 2, p. 210–220.

On a connection of the approximation of nonlinear systems in the sense of time optimality and their algebraic approximation

S.Yu. Ignatovich

The question of a connection of the asymptotic behavior of a solution of the time-optimal control problem and properties of the algebra of nonlinear power moments is considered. Namely, it is shown that if a certain moment min-problem approximates the time-optimal control problem then under certain additional assumptions the structures generated in the algebra by this moment problem and by the nonlinear system coincide.